

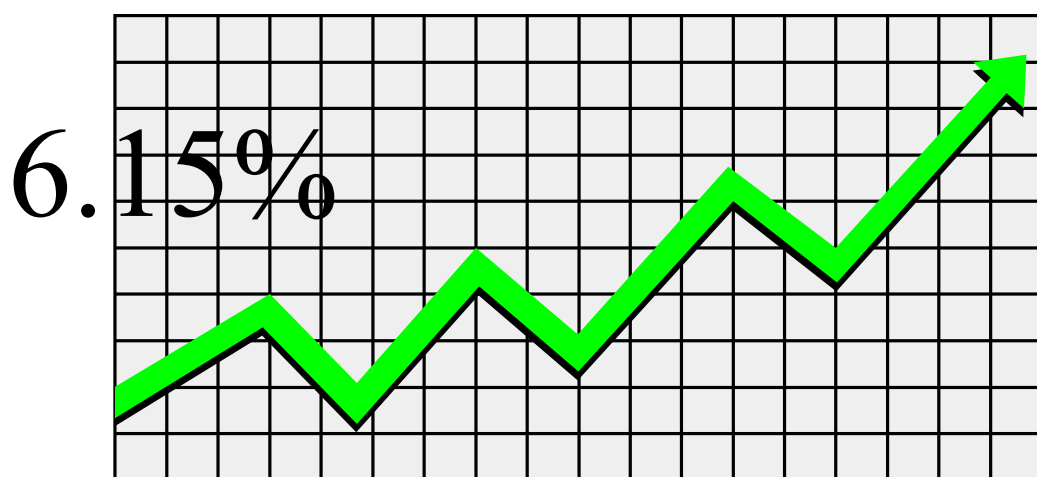
О.В.Співаковський  
В.А.Крекнін

---

# Лінійна алгебра

---

$$\sum_{I=1}^N A \beta x_n \sqrt{\pi}$$



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ЗМІСТУ ТА МЕТОДІВ НАВЧАННЯ  
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ

О.В.Співаковський, В.А.Крекнін

## Лінійна алгебра

*Затверджено Міністерством  
освіти України як посібник  
для студентів вищих  
навчальних закладів*

Херсон 1997

О.В.Співаковський, В.А.Крекнін.  
Лінійна алгебра  
Навч.посібник.-Херсон, 1997.-97 с.

При розв'язуванні практично будь-якої задачі лінійної алгебри найбільш раціональним методом, як правило, є метод виключення змінних Гауса. Цей метод оснований на використанні елементарних перетворень. У запропонованому теоретичному курсі лінійної алгебри весь виклад побудований на основі елементарних перетворень. При спробі побудови теорії визначників автор не зустрічав подібного підходу до викладу цієї теорії в учбовій літературі.

Для студентів вищих навчальних закладів і технікумів, а також слухачів інститутів підвищення кваліфікації.

Рецензети: В.Г.Бутенко член-кореспондент АПН України, доктор педагогічних наук, професор.

А.М.Гужій, член-кореспондент АПН України, доктор технічних наук, професор,

Є.П. Голобородько, член-кореспондент АПН України, доктор педагогічних наук, професор,

П.Ф.Жук, доктор фізико-математичних наук,

# Зміст

---

Вступ .....	1
Векторні простори .....	2
Властивості векторних просторів .....	3
Лінійна залежність векторів .....	4
Еквівалентні системи векторів .....	6
Елементарні перетворення системи векторів .....	7
Ранг системи векторів. Базис і розмірність векторного простору .....	10
Ізоморфізм векторних просторів .....	15
Властивості ізоморфного відображення .....	15
Підпростори .....	19
Лінійні многовиди .....	26
Матриці і дії над ними .....	27
Елементарні матриці .....	37
Ранг матриці .....	42
Визначники .....	49
Лінійні оператори .....	70
Системи лінійних рівнянь .....	78
Власні значення і власні вектори лінійного оператора .....	85
Жорданова форма матриці .....	87
Євклідові простори .....	94

## **Вступ.**

---

Курс "Лінійної алгебри" вивчається звичайно в 1-му і 2-му семестрах вищих навчальних закладів. Курс, необхідно відмітити, тяжкий як для студентів так і для викладачів через велику насиченість задач, пов'язаних з великими обчисленнями. Достатньо згадати, скільки разів необхідно обчислити визначник, розв'язувати системи лінійних рівнянь при розв'язуванні задачі знаходження власних векторів і власних значень лінійного оператора, а відповідно перевіряти правильність розв'язування викладачу. І це тільки формальна сторона справи. А ось змістовна - формування вмінь і навичок розв'язування задач з навчального курсу лінійної алгебри, причому кероване, контрольоване і ефективне, очевидно, в умовах традиційного навчання стає просто неможливим. Тут необхідно чітко розділяти дві зв'язані між собою задачі, перша з яких полягає в формуванні знань в предметній області, друга - в формуванні відповідних вмінь і навичок розв'язування задач з тієї самої області.

Зрозуміло, що перша задача на сьогоднішній день може бути розв'язана тільки викладачем і комп'ютер в цьому випадку буде виступати як інструмент, який виконує управління засвоєнням нових знань.

Але також очевидно і те, що передаючи комп'ютеру управління для розв'язування другої задачі, необхідно чітко уявляти, що програмний продукт повинен повністю підтримувати "ідеологію" теоретичного курсу.

Конкретна реалізація такого погляду в програмно- методичному комплексі "Світ лінійної алгебри" заснована на тому, що теоретичний курс і програмне забезпечення побудовані на роботі з елементарними перетвореннями, починаючи з визначників, систем лінійних рівнянь і закінчуючи жордановими формами, власними векторами і власними значеннями.

Основним і найбільш ефективним методом розв'язування задач лінійної алгебри є метод виключення змінних Гауса. В матричному варіанті цей метод полягає у зведенні даної матриці до ступінчатого або діагонального вигляду за допомогою елементарних перетворень. В свою чергу, кожне елементарне перетворення реалізується шляхом множення матриці зліва або справа на елементарні матриці. Таким способом, як правило, розв'язуються системи лінійних рівнянь, обчислюються визначники і ранги матриць, знаходяться обернені матриці. В традиційному викладенні курсу лінійної алгебри суттєву роль грає поняття визначника, яке вводиться за допомогою підстановок. При такому підході утворюється деякий розрив між теорією і практикою розв'язування задач. З метою усунення згаданого розриву автори вирішили використати інший підхід до побудови курсу лінійної алгебри, який повністю базується на елементарних перетвореннях. При цьому в принципі можна зовсім відмовитись від поняття визначника. Наприклад, формули Крамера можна замінити формулою, що виражає стовбчик невідомих через добуток матриці, оберненої основній матриці системи лінійних рівнянь, на стовбчик вільних членів. Але, віддаючи дань традиції, автори все ж вводять поняття визначника, використовуючи при цьому елементарні матриці, тобто залишаючись в рамках практичних методів розв'язування задач лінійної алгебри. Визначником квадратної матриці, згідно такого підходу, називається добуток діагональних елементів діагональної матриці, яку можна отримати з даної матриці за допомогою елементарних перетворень. Основна трудність, що виникає при цьому, заключається у доведенні інваріантності добутку діагональних елементів. Тут потрібно детально вивчити властивості елементарних матриць і з їх допомогою провести це доведення. В цьому відношенні запропонований авторами підхід має певні незручності. Однак він проявляє себе з кращої сторони при викладі властивостей визначників. В рамках запропонованої авторами побудови всі властивості визначників, що використовуються при їх обчисленні, майже очевидні і фактично не потребують доведення. Очевидна, наприклад, теорема про визначник добутку двох квадратних матриць. Виключенням тут є теорема про розклад визначника по мінорах даного рядка або стовбця, доведення якої виявилось досить великим. Однак, якщо врахувати, що згадана теорема має практичне

застосування тільки при обчисленні визначників третього, в крайньому разі, четвертого порядку, що відзначений недолік не має великого значення.

З інших особливостей викладу треба відмітити більш “геометричне” доведення теореми Гамільтона-Келі. Крім того, автори більш традиційним способом викладають питання, зв’язані з рангом системи векторів і розмірністю векторних просторів. В останніх виданнях “Курсу лінійної алгебри” О.Г.Курош при розгляді цих питань опирається на теорему про ізоморфізм  $n$ -вимірного векторного простору над полем дійсних чисел і  $n$ -вимірного арифметичного простору. В більш ранніх виданнях книги О.Г.Куроша виклад відповідних понять впирається на лему про заміну Штейніця. Виходячи з того, що теорема Штейніця має доволі громіздке формулювання і не дуже проста для сприйняття, О.Г.Курош в останніх виданнях нею не користується. Запропонований авторами модифікований варіант леми Штейніця є найбільш простим для розуміння, і ця причина може виправдати повернення до традиційної форми викладу понять рангу системи векторів і розмірності векторного простору.

Саме ж програмне забезпечення базується на об’єктно-орієнтовному підході, конкретно:

- користувач повинен працювати з реальними об’єктами предметної області (матрицями, системами лінійних рівнянь і т.п.), а тексти і питання з’являються на екрані тільки в самих необхідних випадках;
- користувач повинен працювати тільки в реальній операційній системі, яка однозначно визначається предметною областю (наприклад для матриць: додати два рядки, домножити рядок на число, переставити два рядки місцями, перемножити матриці і т.п.);
- інтерфейс користувача повинен максимально наближатися до звичайного (лист паперу замінитися вікном на екрані, при цьому бажано мати чернетку, яку ніхто не бачить і чистовик для викладача; у вікні чи вікнах знаходиться історія розв’язування користувачем у вигляді послідовності реальних об’єктів навчального курсу, по яких можна пересуватись вперед або назад; якщо деякі числові розрахунки не мають відношення до змісту задачі, то програма бере їх на себе);
- програма повинна давати користувачу широку можливість дій у рамках предметної області (наприклад, з матрицею можна робити будь-які елементарні перетворення у будь-якій послідовності, головне знайти її ранг), тобто користувач не повинен знаходитись під тягарем алгоритму розв’язування, визначеного на стадії написання програмно-педагогічного засобу (ППЗ). При цьому користувач мусить мати можливість пересуватись по своїх діях, вставляючи між ними нові. Більш того, користувач повинен мати можливість взагалі відмовитись від операційного середовища ППЗ і будувати довільно новий об’єкт, а справа програми – оцінити правильність його дій, для чого у програмі має бути вмонтований редактор об’єкту;
- користувач повинен завжди мати вихід із скрутних становищ, для чого в ППЗ має бути вмонтований експерт, який вмітиме теоретично пояснити кожен крок, починаючи з того, де перебуває користувач, і, використовуючи тільки певне операційне середовище, показати у вигляді мультимедіа розв’язування поставленої задачі. При цьому, його на відміну від викладача, можна в будь-який момент перервати і продовжити розв’язування самому;
- історія роботи користувача мусить бути представлена у вигляді послідовності його дій, а при бажанні закінчити роботу має з’явитись інформація яка б аналізувала підсумки його дій.

## Векторні простори

Нехай задані деяке поле  $F$  і непуста множина  $V$ . Елементи поля  $F$  будемо позначати грецькими буквами  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  і називати скалярами. Елементи множини  $V$  будемо називати векторами і позначати малими латинськими буквами з рискою (стрілкою) зверху:  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$

Припустимо, що на множині  $V$  визначена дія додавання векторів, тобто для кожної пари векторів  $\bar{a} \in V, \bar{b} \in V$  знайдеться третій вектор  $\bar{c} \in V$ , який називається сумою векторів  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$ . Дію додавання будемо позначати символом "+" і записувати результат додавання у вигляді:  $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ . Припустимо також, що визначена дія множення скалярів поля  $F$  на вектори множини  $V$  так, що отриманий в результаті множення елемент знову належить  $V$ , тобто є вектором. Якщо  $\alpha \in F, \bar{a} \in V$ , то добуток  $\alpha$  на вектор  $\bar{a}$  будемо записувати у вигляді  $\alpha * \bar{a}$  або  $\alpha \bar{a}$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 1.1.

Непуста множина  $V$  з визначеними вище діями додавання векторів і множення векторів на скаляри поля  $F$  називається векторним (лінійним) простором над полем  $F$ , якщо виконані наступні умови:

- 1)  $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ ;
- 2)  $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ ;
- 3) на множині  $V$  існує нульовий вектор, який позначається  $\bar{0}$ , і який має наступну властивість: для будь-якого вектора  $\bar{a} \in V, \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$ ;
- 4) для кожного вектора  $\bar{a} \in V$  існує протилежний вектор, який позначається через  $(-\bar{a})$ , і який в сумі з вектором  $\bar{a}$  дає нульовий вектор:  $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$ ;
- 5)  $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$ ;
- 6)  $(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$ ;
- 7)  $\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$ ;
- 8)  $1\bar{a} = \bar{a}$ , для будь-якого вектора  $\bar{a} \in V$ .

Умови 1–4 означають, що векторний простір  $V$  є комутативною (абелевою) групою відносно операції додавання векторів.

Суму вектора  $\bar{a}$  і вектора, протилежного вектору  $\bar{b}$ , будемо називати різницею векторів  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  і позначати  $\bar{a} - \bar{b}$ .

## Найпростіші властивості векторних просторів.

- 1) Якщо  $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$ , то  $\bar{a} = \bar{c} - \bar{b}$  (доданок можна переносити з однієї частини в іншу з протилежним знаком).

Доведення:

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}, \text{ тому } (\bar{a} + \bar{b}) + (-\bar{b}) = \bar{c} + (-\bar{b}), \bar{a} + (\bar{b} + (-\bar{b})) = \bar{c} - \bar{b}, \bar{a} + \bar{0} = \bar{c} - \bar{b}, \bar{a} = \bar{c} - \bar{b}.$$

- 2)  $-(-\bar{a}) = \bar{a}$ .

Доведення:

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}, \text{ звідси } (-\bar{a}) + \bar{a} = \bar{0}, \text{ отже, } \bar{a} \text{ є вектором протилежним вектору } -\bar{a}, \text{ тобто } \bar{a} = -(-\bar{a}).$$

- 3)  $0\bar{a} = \bar{0}$  для будь-якого  $\bar{a} \in V$ .

Доведення:

$$\bar{a} = 1\bar{a} \text{ (в силу умови 8 означення 1.1). Тому } \bar{a} = 1\bar{a} = (1 + 0)\bar{a} = 1\bar{a} + 0\bar{a} = \bar{a} + 0\bar{a}, \text{ звідси } \bar{a} = \bar{a} + 0\bar{a}, \text{ або } \bar{a} + (-\bar{a}) = 0\bar{a}, \bar{0} = 0\bar{a}.$$

- 4)  $(-\alpha)\bar{a} = -(\alpha\bar{a})$ ; зокрема  $(-1)\bar{a} = -\bar{a}$ .

Доведення:

$$\bar{0} = 0\bar{a} \text{ (властивість 3); звідси } \bar{0} = 0\bar{a} = (\alpha + (-\alpha))\bar{a} = \alpha\bar{a} + (-\alpha)\bar{a}, \text{ отже, } (-\alpha)\bar{a} = -(\alpha\bar{a})$$

- 5)  $(\alpha - \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} - \beta\bar{a}$ .

Доведення:

$$(\alpha - \beta)\bar{a} = (\alpha + (-\beta))\bar{a} = \alpha\bar{a} + (-\beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + (-\beta\bar{a}) = \alpha\bar{a} - \beta\bar{a}.$$

- 6)  $\alpha(-\bar{b}) = -\alpha\bar{b}$ .

Доведення:

$$\alpha(-\bar{b}) = \alpha((-1)\bar{b}) = ((-1)\alpha)\bar{b} = (-\alpha)\bar{b} = -\alpha\bar{b}$$

- 7)  $\alpha(\bar{a} - \bar{b}) = \alpha\bar{a} - \alpha\bar{b}$ .

Доведення:

$$\alpha(\bar{a} - \bar{b}) = \alpha(\bar{a} + (-\bar{b})) = \alpha\bar{a} + \alpha(-\bar{b}) = \alpha\bar{a} - \alpha\bar{b}$$

- 8)  $\alpha\bar{0} = \bar{0}$  для будь-якого  $\alpha \in F$ .

Доведення:

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{a} - \bar{a}) = \alpha\bar{a} + \alpha(-\bar{a}) = \alpha\bar{a} - \alpha\bar{a} = \bar{0}$$

- 9) Якщо  $\alpha\bar{a} = \bar{0}$ , то або  $\alpha = 0$ , або  $\bar{a} = \bar{0}$ .

Доведення:

Якщо  $\alpha \neq 0$ , то в полі  $F$  існує обернений скаляр  $\alpha^{-1}$ . Тому  $\alpha^{-1}(\alpha\bar{a}) = (\alpha^{-1}\alpha)\bar{a} = 1\bar{a} = \bar{a}$ , з іншого боку  $\alpha^{-1}\bar{0} = \bar{0}$ , тобто  $\bar{a} = \bar{0}$ .

- 10) Методом математичної індукції легко довести, що

$$\alpha(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \dots + \bar{a}_n) = \alpha\bar{a}_1 + \alpha\bar{a}_2 + \alpha\bar{a}_3 + \dots + \alpha\bar{a}_n;$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n)\bar{a} = \alpha_1\bar{a} + \alpha_2\bar{a} + \alpha_3\bar{a} + \dots + \alpha_n\bar{a}.$$

## Лінійна залежність векторів.

### ОЗНАЧЕННЯ 1.2.



Система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  ( $n \geq 1$ ) називається лінійно залежною, якщо існує система скалярів  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ , з яких принаймні один не рівний нулю і для яких справедлива рівність:

$$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3} + \dots + \alpha_n \overline{a_n} = \overline{0} \quad (1.1)$$

Вираз  $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3} + \dots + \alpha_n \overline{a_n}$  будемо називати лінійною комбінацією векторів  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}$  а скаляри  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  – коефіцієнтами цієї лінійної комбінації. Якщо лінійна комбінація системи векторів дорівнює  $\overline{0}$ , то її називають нульовою лінійною комбінацією.

*Відзначимо найпростіші властивості лінійно залежних систем векторів:*

- 
- 1) Система векторів, яка містить тільки один вектор  $\overline{a}$ , лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли  $\overline{a} = \overline{0}$ .

Доведення:

Якщо  $\overline{a} = \overline{0}$ , то при  $\alpha = 1$  маємо:  $1\overline{a} = 1\overline{0} = \overline{0}$ , тобто отримали нульову лінійну комбінацію, в якій є ненульовий коефіцієнт; отже, дана система лінійно залежна.

Припустимо, що система  $\{\overline{a}\}$  лінійно залежна, тобто  $\alpha\overline{a} = \overline{0}$ , причому  $\alpha \neq 0$ . Тоді в силу властивості 9 векторних просторів  $\overline{a} = \overline{0}$ .

- 2) Система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  при  $n > 1$  лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли хоча б один з цих векторів є лінійною комбінацією інших.

Доведення:

Якщо один з векторів даної системи, наприклад  $\overline{a_1}$ , дорівнює лінійній комбінації інших, то  $\overline{a_1} = \beta_2 \overline{a_2} + \beta_3 \overline{a_3} + \dots + \beta_n \overline{a_n}$ . Звідси  $1\overline{a_1} + (-\beta_2)\overline{a_2} + (-\beta_3)\overline{a_3} + \dots + (-\beta_n)\overline{a_n} = \overline{0}$  причому коефіцієнт при  $\overline{a_1}$  дорівнює одиниці, тобто відмінний від нуля.

Отже, дана система лінійно залежна. Припустимо тепер, що система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  лінійно залежна, це означає, що  $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3} + \dots + \alpha_n \overline{a_n} = \overline{0}$ , (1.2), причому хоча б один з коефіцієнтів  $\alpha_j$ , наприклад  $\alpha_1$ , не дорівнює 0;  $\alpha_1 \neq 0$ . З рівності (1.2) отримуємо:  $\alpha_1 \overline{a_1} = (-\alpha_2)\overline{a_2} + (-\alpha_3)\overline{a_3} + \dots + (-\alpha_n)\overline{a_n}$ .

Помноживши це співвідношення на  $\alpha_1^{-1}$  ( $\alpha_1^{-1} \neq 0$ ), отримаємо рівність:

$\overline{a_1} = (-\alpha_2 \alpha_1^{-1})\overline{a_2} + (-\alpha_3 \alpha_1^{-1})\overline{a_3} + \dots + (-\alpha_n \alpha_1^{-1})\overline{a_n}$ . Отже,  $\overline{a_1}$  є лінійною комбінацією векторів  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}$ .

- 3) Якщо деяка непуста підсистема даної системи векторів лінійно залежна, то і вся система лінійно залежна.

Доведення:

Нехай задана система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  і припустимо, що деяка її підсистема з  $m$  векторів лінійно залежна ( $0 < m < n$ ). Дану систему векторів можна при необхідності перенумерувати так, щоб і її підсистема з перших  $m$  векторів була лінійно залежна. Таким чином,  $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3} + \dots + \alpha_m \overline{a_m} = \overline{0}$ , причому хоча б один з коефіцієнтів  $\alpha_j \neq 0$  (наприклад  $\alpha_1 \neq 0$ ). Поклавши  $\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \dots = \alpha_n = 0$  отримаємо, що  $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3} + \dots + \alpha_m \overline{a_m} + \alpha_{m+1} \overline{a_{m+1}} + \dots + \alpha_n \overline{a_n} = \overline{0}$  причому  $\alpha_1 \neq 0$ . Отже задана система векторів лінійно залежна.

### ОЗНАЧЕННЯ 1.3.

Система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$ , ( $n > 1$ ) називається лінійно незалежною, якщо з рівності  $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3} + \dots + \alpha_n \overline{a_n} = \overline{0}$ , випливає, що  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Таким чином, лінійна комбінація лінійно незалежної системи векторів є нульовою тоді і тільки тоді, коли всі її коефіцієнти дорівнюють 0.

### ЗАУВАЖЕННЯ.

Лінійна комбінація будь-якої системи векторів, в якій всі коефіцієнти дорівнюють 0, є нульовою. Якщо система немає інших нульових лінійних комбінацій, то вона лінійно незалежна. Лінійно залежна система має ще інші нульові лінійні комбінації.

### Властивості лінійно незалежних систем векторів.

- 
- 1) Лінійно незалежна система векторів не містить нульового вектора.

#### Доведення:

Якщо система векторів містить нульовий вектор, то її підсистема, яка складається з одного нульового вектора, лінійно залежна (властивість 1 лінійно залежних систем), а отже вся система також лінійно залежна (властивість 3 лінійно залежних систем). Отримали протиріччя.

- 2) Якщо система векторів лінійно незалежна, то будь-яка її підсистема теж лінійно незалежна.

Доведення випливає з властивості 3 лінійно залежних систем.

## Еквівалентні системи векторів.

### ОЗНАЧЕННЯ 1.4.

Будемо казати, що система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  лінійно виражається через систему векторів  $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}, \dots, \overline{b_m}\}$ , якщо будь-який вектор першої системи є лінійною комбінацією другої системи.

### ОЗНАЧЕННЯ 1.5.

Дві системи векторів називаються еквівалентними, якщо кожна з них лінійно виражається через іншу.

### ЛЕМА 1.1.

Якщо система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  лінійно виражається через систему векторів  $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}, \dots, \overline{b_m}\}$ , яка лінійно виражається через систему  $\{\overline{c_1}, \overline{c_2}, \overline{c_3}, \dots, \overline{c_r}\}$ , то перша система векторів лінійно виражається через третю.

Твердження леми 1.1 означає, що лінійна вираженість має транзитивну властивість.

### Доведення:

За умовою леми система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  лінійно виражається через систему  $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}, \dots, \overline{b_m}\}$ . Це значить, що  $\overline{a_i} = \beta_{i1} \overline{b_1} + \beta_{i2} \overline{b_2} + \dots + \beta_{im} \overline{b_m}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (1.3)

Так само  $\overline{b_j} = \gamma_{j1} \overline{c_1} + \gamma_{j2} \overline{c_2} + \dots + \gamma_{jr} \overline{c_r}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Тому, підставляючи в (1.3) замість векторів  $\overline{b_k}$  їх вирази через вектора системи  $\{\overline{c_1}, \overline{c_2}, \overline{c_3}, \dots, \overline{c_r}\}$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \overline{a_i} &= \beta_{i1} (\gamma_{11} \overline{c_1} + \gamma_{12} \overline{c_2} + \dots + \gamma_{1r} \overline{c_r}) + \beta_{i2} (\gamma_{21} \overline{c_1} + \gamma_{22} \overline{c_2} + \dots + \gamma_{2r} \overline{c_r}) + \dots + \beta_{im} (\gamma_{m1} \overline{c_1} + \gamma_{m2} \overline{c_2} + \dots + \gamma_{mr} \overline{c_r}) = \\ &= (\beta_{i1} \gamma_{11} + \beta_{i2} \gamma_{21} + \dots + \beta_{im} \gamma_{m1}) \overline{c_1} + (\beta_{i1} \gamma_{12} + \beta_{i2} \gamma_{22} + \dots + \beta_{im} \gamma_{m2}) \overline{c_2} + \dots + (\beta_{i1} \gamma_{1r} + \beta_{i2} \gamma_{2r} + \dots + \beta_{im} \gamma_{mr}) \overline{c_r} \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n$

Отримані співвідношення означають, що система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  лінійно виражається через систему  $\{\overline{c_1}, \overline{c_2}, \overline{c_3}, \dots, \overline{c_r}\}$ .

Лема доведена.

З леми 1.1 випливає, що поняття еквівалентності систем векторів також має транзитивну властивість. З означення еквівалентності систем векторів безпосередньо випливає, що це поняття має також рефлексивну та симетричну властивість.

## Елементарні перетворення систем векторів.

Нехай задана система векторів (A):  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}, n > 2$ . Будемо по системі векторів (A) будувати нові системи векторів за допомогою деяких перетворень, які прийнято називати елементарними.

### ОЗНАЧЕННЯ 1.6.

Елементарними перетвореннями системи векторів (A)  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}, n > 2$ , називають наступні дії:

1) Перестановка векторів  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}$  (зміна нумерації векторів). За допомогою перетворення 1 система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  перетвориться в систему  $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}, \dots, \overline{b_n}\}$ , де  $\overline{b_i} = \overline{a_j}$ , j-один з номерів 1, 2, ..., n не обов'язково рівний i.

2) Множення вектора  $\overline{a_i}$  на скаляр  $\lambda \in F, \lambda \neq 0$ . За допомогою перетворення 2 система векторів (A) перетворюється в систему  $\{\overline{a_1}, \lambda \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  (вектор  $\overline{a_2} \in A$  помножили на скаляр  $\lambda$ ).

3) Множення вектора  $\overline{a_i}$  на число  $\lambda$ , додавання отриманого вектора до вектора  $\overline{a_j}, j \neq i$ , і заміна вектора  $\overline{a_j}$  сумою вказаних векторів. За допомогою перетворення 3 система векторів (A) перетворюється в систему  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3} + \lambda \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}\}$  (вектор  $\overline{a_2} \in A$  помножили на  $\lambda$ , додали отриманий вектор до вектора  $\overline{a_3}$  і замінили вектор  $\overline{a_3}$  на суму  $\overline{a_3} + \lambda \overline{a_2}$ ).

### ЛЕМА 1.2.

Якщо система векторів (B):  $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}, \dots, \overline{b_n}\}$  отримана з системи (A):  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  за допомогою якого-небудь елементарного перетворення, то ці системи векторів еквівалентні.

### Доведення:

У випадку елементарного перетворення 1 доведення леми очевидне.

Якщо система (B) отримана з системи (A) за допомогою перетворення 2, то  $\overline{b_j} = \lambda \overline{a_j}$ , для деякого  $j, \lambda \neq 0$ . Для  $i \neq j, \overline{b_i} = 0\overline{a_1} + 0\overline{a_2} + \dots + 1\overline{a_i} + \dots + 0\overline{a_n}$ ; якщо  $i = j$ , то  $\overline{b_j} = 0\overline{a_1} + 0\overline{a_2} + \dots + \lambda \overline{a_j} + \dots + 0\overline{a_n}$ .

Таким чином, система (B) лінійно виражається через систему (A). Навпаки, при  $i \neq j, \overline{a_i} = 1\overline{b_i}$ ; якщо  $i = j$ , то  $\overline{a_j} = \lambda^{-1} \overline{b_j} (\lambda \neq 0)$ ; отже, система (A) також лінійно виражається через (B) і, значить, системи еквівалентні.

Нехай тепер система (B) отримана із (A) за допомогою перетворення 3 (наприклад,  $\overline{a_i} = \overline{b_i}, i \neq 1; \overline{b_1} = \overline{a_1} + \lambda \overline{a_j}, j \neq 1$ ). Очевидно, що система (B) лінійно виражається через систему (A). Навпаки, так як при  $i \neq 1, \overline{a_i} = \overline{b_i}$ , то  $\overline{a_1} = \overline{b_1} - \lambda \overline{a_j} = \overline{b_1} - \lambda \overline{b_j}$ . Звідси випливає, що система (A) лінійно виражається через (B) і в цьому випадку системи векторів еквівалентні.

### ЛЕМА 1.3.

Якщо система векторів (A):  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  лінійно незалежна, а система векторів (B):  $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}, \dots, \overline{b_n}\}$  отримана з системи (A) в результаті одного з елементарних перетворень 1-3, то система векторів (B) також лінійно незалежна.

### Доведення:

В разі перетворення 1 твердження очевидне.

Нехай (B) отримана з (A) за допомогою перетворення 2. Припустимо, що  $\overline{b_j} = \lambda \overline{a_j}, \lambda \neq 0$ . Доведемо, що система векторів (B) лінійно незалежна. Розглянемо нульову комбінацію

векторів системи (В):  $\beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \dots + \beta_j \bar{b}_j + \dots + \beta_n \bar{b}_n = \bar{0}$ . Так як  $\bar{a}_i = \bar{b}_i$ ,  $i \neq j$ ,  $\bar{b}_j = \lambda \bar{a}_j$ , то  $\beta_1 \bar{a}_1 + \beta_2 \bar{a}_2 + \dots + (\beta_j \lambda) \bar{a}_j + \dots + \beta_n \bar{a}_n = \bar{0}$ .

З лінійної незалежності системи (А) випливає, що  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_j \lambda = \dots = \beta_n = \bar{0}$ . Оскільки  $\lambda \neq 0$ , то  $\beta_j = 0$  для всіх  $i = 1, 2, \dots, n$ , і система (В) лінійно незалежна.

Нехай система (В) отримана з системи (А) за допомогою перетворення 3;  $\bar{b}_j = \bar{a}_j + \lambda \bar{a}_i$ ,  $i \neq j$ . Знову розглянемо нульову лінійну комбінацію векторів системи (В):  $\beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \dots + \beta_j \bar{b}_j + \dots + \beta_n \bar{b}_n = \bar{0}$ . Зробивши підстановку  $\bar{a}_i = \bar{b}_i$ ,  $i \neq j$ ,  $\bar{b}_j = \bar{a}_j + \lambda \bar{a}_i$  отримаємо:  $\beta_1 \bar{a}_1 + \beta_2 \bar{a}_2 + \dots + \beta_j (\bar{a}_j + \lambda \bar{a}_i) + \dots + \beta_n \bar{a}_n = \bar{0}$  або  $\beta_1 \bar{a}_1 + \beta_2 \bar{a}_2 + \dots + (\beta_i + \lambda \beta_j) \bar{a}_i + \dots + \beta_n \bar{a}_n = \bar{0}$ . З лінійної незалежності системи (А) отримаємо, що  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_i + \lambda \beta_j = \dots = \beta_j = \dots = \beta_n = 0$ . Таким чином, всі  $\beta_s$ ,  $s \neq i$ , зокрема  $\beta_i = 0$ . Так як  $\beta_i + \lambda \beta_j = 0$ , то  $\beta_j = 0$ . Отже, система (В) лінійно незалежна.

Лема доведена.

ЛЕМА 1.4. (Штейнція)

Якщо система векторів (А),  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_r\}$  лінійно незалежна і лінійно виражається через систему векторів (В),  $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_s\}$ , то  $r \leq s$ .

Доведення:

Доведення будемо проводити індукцією по числу елементів в системі (А).

Якщо число  $i = 1$ , то лема очевидна, тому, що система векторів (В) не може бути порожньою ( $\bar{a}_i \neq 0$ ). Припустимо, що лема доведена для  $i = m$  і доведемо її для  $i = m + 1$ . Так як система (А) лінійно виражається через систему (В), то  $\bar{a}_i = \alpha_{i1} \bar{b}_1 + \alpha_{i2} \bar{b}_2 + \dots + \alpha_{is} \bar{b}_s$ ,  $i = 1, 2, \dots, m + 1$ .

В силу лінійної незалежності векторів системи (А),  $\bar{a}_1 \neq 0$  і хоча б один з коефіцієнтів  $\alpha_{1j} \neq 0$ . Без обмеження загальності можна вважати, що  $\alpha_{11} \neq 0$ . Розглянемо систему векторів (С),  $\{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \dots, \bar{c}_r\}$ , де  $\bar{c}_1 = \bar{a}_1$ ,  $\bar{c}_j = \bar{a}_j + (-\alpha_{j1} \alpha_{11}^{-1}) \bar{a}_1$ ,  $j > 1$ . Таким чином, система (С) лінійно виражається через систему (А), а значить і через систему (В):  $\bar{c}_1 = \alpha_{11} \bar{b}_1 + \alpha_{12} \bar{b}_2 + \dots + \alpha_{1s} \bar{b}_s$ ,  $\bar{c}_j = \gamma_{j1} \bar{b}_1 + \gamma_{j2} \bar{b}_2 + \dots + \gamma_{js} \bar{b}_s$ ,  $j > 1$ , де  $\gamma_{ji} = \alpha_{ji} - \alpha_{j1} \alpha_{1i} \alpha_{11}^{-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ .

З цього отримаємо, що  $\gamma_{j1} = \alpha_{j1} - \alpha_{j1} \alpha_{11} \alpha_{11}^{-1} = \alpha_{j1} - \alpha_{j1} = 0$ . Отже,  $\bar{c}_1 = \alpha_{11} \bar{b}_1 + \alpha_{12} \bar{b}_2 + \dots + \alpha_{1s} \bar{b}_s$ ,  $\bar{c}_j = \gamma_{j2} \bar{b}_2 + \dots + \gamma_{js} \bar{b}_s$ ,  $j > 1$  (1.4)

Розглянемо ланцюжок систем векторів: (А)=(С<sub>1</sub>), (С<sub>2</sub>), ..., (С<sub>s-1</sub>), (С)=(С<sub>s</sub>), (С<sub>t</sub>)= $\{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \dots, \bar{c}_t, \bar{a}_{t+1}, \dots, \bar{a}_s\}$ ,  $t = 1, 2, \dots, s-1$ .

Очевидно, система векторів (С<sub>t</sub>) отримана з системи векторів (С<sub>t-1</sub>) заміною вектора  $\bar{a}_t$  на вектор  $\bar{c}_t = \bar{a}_t - \alpha_{t1} \alpha_{11}^{-1} \bar{a}_1 = \bar{a}_t - \alpha_{t1} \alpha_{11}^{-1} \bar{c}_1$ .

Отже, система векторів (С<sub>t</sub>) отримана з системи векторів (С<sub>t-1</sub>) за допомогою елементарного перетворення 3. В силу лем 1.3, система векторів (С<sub>2</sub>) лінійно незалежна, тому що система (С<sub>1</sub>)=(А) лінійно незалежна за умовою лем. Аналогічно, застосовуючи лему 1.3, доведемо послідовно лінійну незалежність векторів (С<sub>3</sub>), (С<sub>3</sub>), ..., (С<sub>s-1</sub>), (С<sub>s</sub>)=(С).

Система (D),  $\{\bar{c}_2, \bar{c}_3, \dots, \bar{c}_r\}$ , як підсистема лінійно незалежної системи векторів, буде сама лінійно незалежною (властивість 2 лінійно незалежних систем). З другого боку, система (D) лінійно виражається через систему (F),  $\{\bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_s\}$ , яка містить (s-1) векторів. Так як система (D) містить (r-1) вектор і (D) лінійно незалежна, то за припущенням індукції  $(r-1) \leq (s-1)$ , тобто  $r \leq s$ . Лема доведена.

## Ранг системи векторів. Базис і розмірність векторного простору.

Одним з основних понять теорії векторних просторів є поняття максимальної лінійно незалежної підсистеми.

### ОЗНАЧЕННЯ 2.1.

Нехай дана скінченна або нескінченна підмножина векторів  $S \subset V$ , де  $V$  - векторний простір над полем  $\Phi$ . Скінченна підмножина  $A = \{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_r}\}$ ,  $A \subset S$ , називається максимальною лінійно незалежною підсистемою на множині  $S$ , якщо виконані умови:

- 1) Система векторів  $(A)$  лінійно незалежна;
- 2) Якщо до системи  $(A)$  додати будь-який вектор  $\overline{b} \in S$ , то система  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_r}, \overline{b}\}$  буде лінійно залежною.

### ЛЕМА 2.1.

Якщо  $A$  - максимальна лінійно незалежна підсистема на множині векторів  $S$ , то будь-який вектор  $\overline{b} \in S$  можна єдиним чином представити у вигляді лінійної комбінації векторів системи  $(A)$ ,  $A = \{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_r}\}$ .

### Доведення:

За означенням максимальної лінійно незалежної підсистеми, система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_r}, \overline{b}\}$  лінійно залежна. Це значить, що

$$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \dots + \alpha_r \overline{a_r} + \beta \overline{b} = \overline{0}, \quad (2.1) \text{ причому, хоча б один з коефіцієнтів}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$  не дорівнює нулю. Доведемо, що в цьому випадку  $\beta \neq 0$ . Якщо це не так,

тобто  $\beta = 0$ , то  $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \dots + \alpha_r \overline{a_r} = \overline{0}$  і з лінійної незалежності системи  $(A)$  випливає,

що  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$ . Так як  $\beta = 0$ , то всі коефіцієнти лінійної комбінації у

співвідношенні (2.1) рівні нулю, а це протирічить припущенню. Отже,  $\beta \neq 0$ . Тоді з рівності

$$(2.1) \quad \text{отримали:} \quad \beta \overline{b} = -\alpha_1 \overline{a_1} - \alpha_2 \overline{a_2} - \dots - \alpha_r \overline{a_r}, \quad \text{або}$$

$$\overline{b} = (-\alpha_1 \beta^{-1}) \overline{a_1} + (-\alpha_2 \beta^{-1}) \overline{a_2} + \dots + (-\alpha_r \beta^{-1}) \overline{a_r}, \quad \overline{b} = \gamma_1 \overline{a_1} + \gamma_2 \overline{a_2} + \dots + \gamma_r \overline{a_r} \quad (2.2), \text{ де}$$

$$\gamma_i = -\alpha_i \beta^{-1}.$$

Перша частина твердження доведена. Для доведення єдиності представлення (2.2)

потрібно встановити, що якщо в системі коефіцієнтів  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$  хоча б для одного  $i$ ,

$\lambda_i \neq \gamma_i$ , то  $\overline{b} \neq \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_r \overline{a_r}$ . Отже, нехай наприклад,  $\lambda_1 \neq \gamma_1$ , але

$\bar{b} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_r \bar{a}_r$ . Тоді

$\bar{0} = \bar{b} + (-\bar{b}) = \gamma_1 \bar{a}_1 + \gamma_2 \bar{a}_2 + \dots + \gamma_r \bar{a}_r + (-\lambda_1 \bar{a}_1 - \lambda_2 \bar{a}_2 - \dots - \lambda_r \bar{a}_r) = (\gamma_1 - \lambda_1) \bar{a}_1 + (\gamma_2 - \lambda_2) \bar{a}_2 + \dots + (\gamma_r - \lambda_r) \bar{a}_r$   
причому  $\gamma_1 - \lambda_1 \neq 0$ , це неможливо, тому що система векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_r\}$  лінійно

незалежна. Отримане протиріччя доводить єдиність представлення (2.2). Лема доведена повністю.

Наслідок 2.1

Якщо  $S$  – довільна множина векторів у просторі  $V$  над полем  $F$  і  $A$  – його максимальна лінійно незалежна підсистема, то будь-яка підмножина  $T \subset S$  лінійно виражається через систему  $A$ .

Наслідок 2.2

Якщо  $A$  і  $B$  дві максимально лінійно незалежні підсистеми векторів на множині  $S$ , то кількість векторів системи  $A$  дорівнює кількості векторів системи  $B$ .

Доведення:

Позначимо через  $m$  і  $n$  кількість векторів відповідно в системах  $A$  і  $B$ . В силу наслідку 2.1, система векторів  $A$  лінійно виражається через систему векторів  $B$ . Так як  $A$  – лінійно незалежна система, то за лемою Штейниця,  $m \leq n$ . Замінивши в цьому міркуванні місцями системи  $A$  і  $B$ , отримаємо, що  $n \leq m$ . Отже,  $m = n$ . Таким чином, кількість векторів у будь-якій максимально лінійно незалежній підсистемі з множини  $S$  одна і та ж. Це виправдовує означення, які наведені нижче.

ОЗНАЧЕННЯ 2.2.

Векторний простір  $V$  над полем  $F$  називається скінченномірним, якщо в ньому існує максимальна лінійно незалежна підсистема.

В подальшому всі розглянуті векторні простори будуть вважатися скінченномірними. З лем 1.4 і 2.1 випливає, що будь-яка підсистема векторів скінченномірного векторного простору має максимальну лінійно незалежну підсистему.

ОЗНАЧЕННЯ 2.3.

Рангом множини  $S$  називають число векторів в будь-якій максимальній лінійно незалежній підсистемі з множини  $S$ .

ОЗНАЧЕННЯ 2.4.

Базисом скінченномірного векторного простору  $V$  називається будь-яка максимальна лінійно незалежна підсистема у просторі  $V$ .

ОЗНАЧЕННЯ 2.5.

Розмірністю скінченномірному векторного простору  $V$  називається число векторів в будь-якому базисі цього простору (тобто ранг множини векторів  $V$ ).

Розмірність векторного простору  $V$  будемо позначати через  $\dim V$ , а ранг системи векторів  $S$  – через  $r(S)$ .

ЛЕМА 2.2.

Якщо система векторів  $S_1$  лінійно виражається через систему векторів  $S_2$ , то ранг системи  $S_1$  не перебільшує рангу системи  $S_2$ .

Доведення:

Позначимо через  $A_1$  і  $A_2$  максимальні лінійно незалежні підсистеми в системах  $S_1$  і  $S_2$  відповідно. Оскільки система  $S_1$  лінійно виражається через  $S_2$ , то в силу леми 1.1,  $S_1$  лінійно виражається через  $A_2$ . Так як  $A_1 \subset S_1$ , то лінійно незалежна система векторів  $A_1$  лінійно виражається через систему  $A_2$ . В силу леми Штейниці, кількість векторів в системі  $A_1$  (ранг системи  $S_1$ ) не перевищує кількості векторів в системі  $A_2$  (ранг системи  $S_2$ ). Таким чином, ранг системи  $S_1$  не перевищує ранг системи  $S_2$ .

Наслідок 2.3.

Ранги еквівалентних систем векторів рівні між собою.

В зв'язку з поняттям максимальної лінійно незалежної підсистеми векторів виникає питання про практичне відшукування такої підсистеми для заданої множини векторів. У вирішенні цього питання може бути корисною наступна лема:

ЛЕМА 2.3.

Якщо  $A = \{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_m}\}$  лінійно незалежна підсистема векторів на множині  $S$ , то існує максимально лінійно незалежна підсистема  $B$  векторів з  $S$ , яка містить в собі  $A$ .

Доведення:

Позначимо через  $r$  ранг множини векторів  $S$  і нехай  $C$  - довільна максимальна лінійно незалежна підсистема з  $S$ . Так як  $A$  лінійно незалежна система, яка лінійно виражається через систему  $C$ , то  $m \leq r$ . Якщо  $m = r$ , то система векторів  $A$  - максимальна лінійно незалежна підсистема в  $S$ , інакше в  $S$  існувала б лінійно незалежна система, яка містила б  $m + 1 = r + 1$  вектор, що неможливо (наслідок 2.2). В цьому випадку припустимо  $B=A$ , і лема доведена. Якщо  $m < r$ , то система  $A$ , в силу наслідку 2.2 не може бути максимальною лінійно незалежною підсистемою. Тому існує в  $S$  лінійно незалежна підсистема  $A_1 \supset A$ , причому кількість векторів в системі  $A_1$  дорівнює  $m+1$ . Якщо  $m+1=r$ , то  $A$  - максимальна лінійно незалежна підсистема,  $B = A_1 \supset A$ , і твердження леми доведене. Міркуючи таким чином, отримаємо ланцюжок



лінійно незалежних підсистем  $A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_k$ , причому число векторів в системі  $A_i$  дорівнює  $m + i$ . При  $k = r - m$  отримаємо максимальну лінійно незалежну підсистему. Поклавши  $B = A_{r-m}$ , отримаємо ствердження леми.

Наслідок 2.4.

Будь-яка лінійно незалежна система векторів в скінченномірному векторному просторі може бути доповнена до базиса всього простору.

В подальшому буде потрібна ще одна лема.

ЛЕМА 2.4.

Нехай  $S = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$ ,  $T = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n\}$  дві скінченні системи векторів, які містять однакову кількість векторів. Якщо з будь-якого співвідношення  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{a}_i = \bar{0}$  випливає співвідношення  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{b}_i = \bar{0}$ , то  $r(T) \leq r(S)$ .

Доведення:

Припустимо, що ранг системи векторів  $T$  дорівнює  $k$ ,  $k \leq n$ , і  $\{\bar{b}_{s(1)}, \bar{b}_{s(2)}, \dots, \bar{b}_{s(k)}\}$  - максимальна лінійно незалежна підсистема системи  $T$ ; тут  $S$  - ін'єктивне відображення множини  $\{1, 2, \dots, k\}$  на множину  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  $k \leq n$ . Доведемо, що  $S_1 = \{\bar{a}_{s(1)}, \bar{a}_{s(2)}, \dots, \bar{a}_{s(k)}\}$  - також лінійно незалежна система векторів. Для цього необхідно встановити рівність нулю всіх коефіцієнтів в довільній нульовій лінійній комбінації векторів системи  $S_1$ .

Нехай  $\sum_{i=1}^k \mu_{s(i)} \bar{a}_{s(i)} = \bar{0}$ . Тоді  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{a}_j = \bar{0}$ , де  $\lambda_j = \mu_{s(i)}$ , якщо  $j = s(i)$ ,  $\lambda_j = 0$ , якщо  $j \neq s(i)$  ні для якого  $i=1, 2, \dots, k$ . За умовою леми  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{b}_j = \bar{0}$ , тобто  $\sum_{i=1}^k \mu_{s(i)} \bar{b}_{s(i)} = \bar{0}$ . Звідси випливає, що  $\mu_{s(i)} = 0$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ , оскільки  $\{\bar{b}_{s(1)}, \bar{b}_{s(2)}, \dots, \bar{b}_{s(k)}\}$  - лінійно незалежна система векторів. Отже  $S_{(1)}$  лінійно незалежна,  $S_{(1)} \subset S$ . Таким чином,  $r(T) = k = r(S_1) \leq r(S)$ , що і треба було довести.

ОЗНАЧЕННЯ 2.6.

Нехай  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$  - базис векторного простору розмірності  $n$  над полем  $F$ . Координатами вектора  $\bar{b} \in V$  в базисі  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$  називається система елементів  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  з поля  $F$  таких, що  $\bar{b} = \beta_1 \bar{a}_1 + \beta_2 \bar{a}_2 + \dots + \beta_n \bar{a}_n$ .

В силу леми 2.1, координати вектора  $\bar{b}$  в базисі  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$  однозначно визначені, і навпаки, вектор  $\bar{b}$  повністю визначений, якщо задані його координати в деякому базисі.

Якщо вектор  $\bar{b}$  має координати  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  в деякому базисі, то  $\bar{b}$  будемо записувати у вигляді  $\bar{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ .

ЛЕМА 2.5.

Координати суми (різниці) двох векторів  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  рівні суммам (різняцям) відповідних координат цих векторів; координати добутку вектора  $\bar{a}$  на скаляр  $\lambda$  дорівнює добутку відповідних координат вектора  $\bar{a}$  на скаляр  $\lambda$ .

Іншими словами, якщо  $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $\bar{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ , то  $\bar{a} \pm \bar{b} = (\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \dots, \alpha_n \pm \beta_n)$ ,  $\lambda \bar{a} = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n)$ .

Доведення:

Доведемо, наприклад, що  $\bar{a} \pm \bar{b} = (\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \dots, \alpha_n \pm \beta_n)$ . Так як  $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $\bar{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ , то  $\bar{a} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n$ ; тому:  $\bar{a} + \bar{b} = (\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n) + (\beta_1 \bar{a}_1 + \beta_2 \bar{a}_2 + \dots + \beta_n \bar{a}_n) = (\alpha_1 + \beta_1) \bar{a}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \bar{a}_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) \bar{a}_n$ . Звідси отримаємо, що  $\bar{a} + \bar{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ . Тут  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$  - базис простору V.

Інші співвідношення доводяться аналогічно.

ПРИКЛАД 2.1.

Нехай F - довільне поле і n-деяке натуральне число. Розглянемо декартовий добуток  $F^n = F \times F \times \dots \times F$ , в якому кількість множників дорівнює n. Елементами множини  $F^n$  є набори з n скалярів поля F; якщо  $a \in F^n$ , то  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . На множині  $F^n$  визначимо структуру векторного простору над полем F, таким чином: якщо  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ , то покладемо  $a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ ,  $\lambda a = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n)$ . Елемент  $a + b$  назвемо сумою елементів a і b, а  $\lambda a$  - добутком скаляра  $\lambda$  на елемент a.

Безпосередньою перевіркою можна впевнитись, що визначені таким чином дії додавання і множення на скаляр задовольняють всім аксіомам векторного простору. Таким чином,  $F^n$  - векторний простір над полем F.

Легко впевнитись також, що множина  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ , де  $\bar{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $\bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $\bar{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ , є базисом простору  $F^n$ . Таким чином,  $F^n$ -простір має розмірність n. Якщо  $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , то  $\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$ . Отже,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  - координати вектора  $\bar{a}$  у вказаному базисі.

## **Ізоморфізм векторних просторів.**

Нехай  $V$  - векторний простір розмірності  $n$  над деяким полем  $F$  і  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$  - деякий його базис. Означимо відображення  $\varphi$  простору  $V$  в  $F^n$  по наступному правилу: для  $\bar{b} \in V$  покладемо  $\varphi(\bar{b}) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in F^n$ ;  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  - координати вектора  $\bar{b}$  в базисі  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$ .

З леми 2.5 випливає, що  $\varphi(\bar{b} + \bar{c}) = \varphi(\bar{b}) + \varphi(\bar{c})$ ,  $\varphi(\lambda \bar{b}) = \lambda \varphi(\bar{b})$ . Крім того, очевидно відображення  $\varphi$  є бієктивним.

### ОЗНАЧЕННЯ 2.7.

Два векторних простори  $U$  і  $V$  над одним і тим же полем  $F$  називаються ізоморфними, якщо існує бієктивне відображення  $\varphi$  простору  $U$  в простір  $V$ , яке задовольняє умовам:

- 1)  $\varphi(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b})$  для будь-яких векторів  $\bar{a} \in U$ ,  $\bar{b} \in U$ ,
- 2)  $\varphi(\lambda \bar{a}) = \lambda \varphi(\bar{a})$  для будь-якого  $\bar{a} \in U$  і будь-якого  $\lambda \in F$ .

Відображення  $\varphi$  називають ізоморфізмом.

## **Властивості ізоморфного відображення.**

- 1)  $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$  (тут одним і тим самим символом  $\bar{0}$  позначені нульовий вектор простору  $U$  і нульовий вектор простору  $V$ ). Насправді  $\varphi(\bar{0}) = \varphi(0a) = 0\varphi(a) = \bar{0}$ , тут  $a$  - довільний вектор з простору  $U$ .
- 2)  $\varphi(\alpha \bar{a} + \beta \bar{b}) = \alpha \varphi(\bar{a}) + \beta \varphi(\bar{b})$ . З умови 1 означення ізоморфних просторів випливає, що  $\varphi(\alpha \bar{a} + \beta \bar{b}) = \alpha \varphi(\bar{a}) + \beta \varphi(\bar{b})$ ; з умови 2  $\varphi(\alpha \bar{a}) = \alpha \varphi(\bar{a})$  і  $\varphi(\beta \bar{b}) = \beta \varphi(\bar{b})$ , звідки і отримуємо необхідну властивість.
- 3)  $\varphi(\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n) = \alpha_1 \varphi(\bar{a}_1) + \alpha_2 \varphi(\bar{a}_2) + \dots + \alpha_n \varphi(\bar{a}_n)$  цю властивість легко може бути отримана методом математичної індукції з властивості 2.
- 4) Система векторів  $\{\varphi(\bar{a}_1), \varphi(\bar{a}_2), \varphi(\bar{a}_3), \dots, \varphi(\bar{a}_n)\}$  векторного простору  $V$  лінійно незалежна тоді і тільки тоді, коли лінійно незалежна система векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$  в просторі  $U$ .

### Доведення:

Припустимо спочатку, що система  $\{\overline{\varphi(a_1)}, \overline{\varphi(a_2)}, \overline{\varphi(a_3)}, \dots, \overline{\varphi(a_n)}\}$  лінійно незалежна. Нам потрібно довести, що система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  також лінійно незалежна. Припустимо протилежне. Тоді існує система скалярів  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , з яких хоча б один не дорівнює нулю, така, що  $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \dots + \alpha_n \overline{a_n} = \overline{0}$ . Тоді  $\varphi(\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \dots + \alpha_n \overline{a_n}) = \varphi(\overline{0})$ .

Застосовуючи властивості 1 і 3 ізоморфних відображень, отримаємо:  $\alpha_1 \varphi(\overline{a_1}) + \alpha_2 \varphi(\overline{a_2}) + \dots + \alpha_n \varphi(\overline{a_n}) = \overline{0}$ , що протирічить лінійній незалежності системи  $\{\overline{\varphi(a_1)}, \overline{\varphi(a_2)}, \overline{\varphi(a_3)}, \dots, \overline{\varphi(a_n)}\}$ . Отримане протиріччя доводить першу частину твердження.

Нехай тепер система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  - лінійно незалежна. Припустимо, що система векторів  $\{\overline{\varphi(a_1)}, \overline{\varphi(a_2)}, \overline{\varphi(a_3)}, \dots, \overline{\varphi(a_n)}\}$  лінійно залежна. Тоді  $\alpha_1 \overline{\varphi(a_1)} + \alpha_2 \overline{\varphi(a_2)} + \dots + \alpha_n \overline{\varphi(a_n)} = \overline{0}$ , причому не всі  $a_i = 0$ .

За властивістю 3 ізоморфних відображень ліва частина останньої рівності дорівнює  $\varphi(\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \dots + \alpha_n \overline{a_n})$ , а права частина дорівнює  $\varphi(\overline{0})$ . В силу бієктивності відображення  $\varphi$ ,  $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \dots + \alpha_n \overline{a_n} = \overline{0}$ , що неможливо, так як за умовою система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  лінійно незалежна.

Властивість 4 повністю доведена.

#### ТЕОРЕМА 2.1.

Для того, щоб два векторних простори  $U$  і  $V$  над одним і тим же полем  $F$  були ізоморфними необхідно і достатньо, щоб розмірності просторів  $U$  і  $V$  співпадали.

#### Доведення:

#### Необхідність.

Припустимо, що простори  $U$  і  $V$  ізоморфні, і  $\varphi$  - ізоморфне відображення  $U$  на  $V$ . Якщо  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \dots, \overline{e_n}\}$  - базис простору  $U$ , то система векторів  $\{\overline{\varphi(e_1)}, \overline{\varphi(e_2)}, \overline{\varphi(e_3)}, \dots, \overline{\varphi(e_n)}\}$  в просторі  $V$  лінійно незалежна в силу властивості 4. Припустимо, що ця система не є базисом простору  $V$ . Тоді в просторі  $V$  існує вектор  $\overline{y}$ , такий, що система векторів  $\{\overline{\varphi(e_1)}, \overline{\varphi(e_2)}, \overline{\varphi(e_3)}, \dots, \overline{\varphi(e_n)}\}$  лінійно незалежна. В силу сюр'єктивності відображення  $\varphi$ ,  $\overline{y} = \varphi(\overline{a})$ , для деякого вектора  $\overline{a} \in U$ . Таким чином, система векторів  $\{\overline{\varphi(e_1)}, \overline{\varphi(e_2)}, \overline{\varphi(e_3)}, \dots, \overline{\varphi(e_n)}\}$  лінійно незалежна. За властивістю 4, система  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \dots, \overline{e_n}, \overline{a}\}$  також лінійно незалежна. Це неможливо, так як  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \dots, \overline{e_n}\}$  базис простору  $U$ . Таким чином, система векторів  $\{\overline{\varphi(e_1)}, \overline{\varphi(e_2)}, \overline{\varphi(e_3)}, \dots, \overline{\varphi(e_n)}\}$  -

максимальна лінійно незалежна система векторів простору  $V$ , тобто його базис. Тому розмірності просторів  $U$  і  $V$  співпадають (обидві дорівнюють  $n$ ).

Достатність.

Припустимо, що розмірності просторів  $U$  і  $V$  співпадають. Нехай  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n\}$  - деякий базис простору  $U$ , а  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \dots, \bar{f}_n\}$  - якийсь базис простору  $V$ . Якщо  $\bar{x}$  - довільний вектор простору  $U$ , то  $\bar{x} = \gamma_1 \bar{e}_1 + \gamma_2 \bar{e}_2 + \dots + \gamma_n \bar{e}_n$ . Нехай  $\varphi(\bar{x}) = \gamma_1 \bar{f}_1 + \gamma_2 \bar{f}_2 + \dots + \gamma_n \bar{f}_n$ ,  $\bar{f} \in V$ . Тим самим визначили відображення  $\varphi$  простору  $U$  в простір  $V$ . Отже, відображення  $\varphi$  переводить вектор  $\bar{x} \in U$ , з координатами  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n\}$  в вектор  $\bar{y}$  простору  $V$  з тими ж координатами в базисі  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \dots, \bar{f}_n\}$ . З цього зауваження і з леми 2.5 випливає, що  $\varphi(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b})$ ,  $\varphi(\lambda \bar{a}) = \lambda \varphi(\bar{a})$  для будь-яких векторів  $\bar{a} \in U$ ,  $\bar{b} \in U$  і довільного  $\lambda \in F$ . Якщо  $\varphi(\bar{a}) = \varphi(\bar{b})$ , то відповідні координати векторів  $\varphi(\bar{a})$  і  $\varphi(\bar{b})$  співпадають. Це означає, що відповідні координати векторів  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  також рівні, і  $\bar{a} = \bar{b}$ . Таким чином, відображення  $\varphi$  ін'єктивне. Якщо  $\bar{y}$  довільний вектор простору  $V$  з координатами  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  в базисі  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \dots, \bar{f}_n\}$ , то  $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$ , де  $\bar{x}$  - вектор з координатами  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n\}$ . Отже, відображення  $\varphi$  - сюр'єктивне. Враховуючи все сказане, отримаємо, що  $\varphi$  - ізоморфне відображення простору  $U$  на простір  $V$ .

Теорема повністю доведена.

З цієї теореми легко випливає, що відношення ізоморфності векторних просторів рефлексивне, симетричне і транзитивне, тобто є відношенням еквівалентності.

З прикладу, розглянутого на початку цього параграфа, випливає, що векторний простір  $V$  розмірності  $n$  над полем  $F$  ізоморфний  $F^n$ . Якщо  $F = \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$  - поле дійсних чисел, то векторний простір  $\mathbb{R}^n$  називають  $n$ -мірним векторним арифметичним простором. Таким чином, будь-який  $n$ -мірний векторний простір над полем дійсних чисел  $\mathbb{R}$  ізоморфний  $n$ -мірному арифметичному простору.

Якщо відійти від конкретної природи векторів, з яких складається векторний простір  $V$ , а враховувати тільки ті їх властивості, які пов'язані з діями додавання векторів і множення векторів на скаляри, то ізоморфні векторні простори не розрізняються. Тому можна сказати, що з точністю до позначень ізоморфні векторні простори співпадають.

Відмітимо наступне:

Якщо поле  $F$  є полем лишків кільця цілих чисел за модулем  $P(F = Z_p)$ , то векторний простір  $F^n$  містить  $P^n$  елементів. Так як довільний  $n$ -мірний векторний простір  $U$  над полем  $Z_p$  ізоморфний простору  $Z_p^n$ , а ізоморфне відображення  $\varphi$  простору  $U$  на  $Z_p^n$  бієктивне, то простір  $U$  містить  $p^n$  елементів. Отже,  $n$ -мірний векторний простір над полем  $Z_p$  скінченний і складається з  $p^n$  елементів.

## Підпростори

### ОЗНАЧЕННЯ 2.8.

Непуста множина  $W$  векторного простору  $V$  над полем  $F$  називається підпростором простору  $V$ , якщо  $W$  є векторним простором над полем  $F$  відносно дій додавання векторів і добутку вектора на скаляр, визначених в просторі  $W$ .

### ТЕОРЕМА 2.2.

Для того, щоб непуста підмножина  $W$  векторного простору  $V$  над полем  $F$  була підпростором простору  $V$ , необхідно і достатньо, щоб для будь-яких векторів  $\bar{a} \in W$ ,  $\bar{b} \in W$  і будь-якого скаляра  $\lambda \in F$  вектори  $\bar{a} + \bar{b}$  і  $\lambda \bar{a}$  належали б  $W$ .

#### Доведення:

*Необхідність.*

Якщо  $W$ - підпростір простору  $V$ , то  $W$  разом з будь-якими двома векторами  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  повинен містити і вектор  $\bar{a} + \bar{b}$ . Насправді,  $W$ , за означенням, є векторним простором над полем  $F$ , причому сума векторів в просторі  $W$  співпадає з їх сумою в просторі  $V$ . Отже,  $\bar{a} + \bar{b} \in W$  і  $\lambda \bar{a} \in W$  для будь-якого  $\bar{a} \in W$  і  $\lambda \in F$ . Необхідність доведена.

*Достатність.*

Нехай для будь-яких векторів  $\bar{a} \in W$ ,  $\bar{b} \in W$  і будь-якого скаляра  $\lambda \in F$  вектори  $\bar{a} + \bar{b}$  і  $\lambda \bar{a}$  належать  $W$ . Отже, на множині  $W$  визначені дії додавання векторів і множення векторів на скаляри поля  $F$ . Властивості 1-8 цих операцій з означення векторного простору виконуються, тому що вони виконуються на всій множині  $V$ , частиною якої є  $W$ . Теорема повністю доведена.

### ОЗНАЧЕННЯ 2.9.

Нехай  $V$  - векторний простір над полем  $F$  і  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$  - скінченна система векторів з простору  $V$ . Лінійною оболонкою системи векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$  називається множина всіх можливих лінійних комбінацій векторів цієї системи.

Лінійну оболонку векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$  будемо позначати символом  $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n) = \{\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \alpha_3 \bar{a}_3 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n, \alpha_i \in F, i = 1, 2, \dots, n\}$

### ЛЕМА 2.6

Лінійна оболонка системи векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$ ,  $\bar{a}_i \in W$ , співпадає з лінійною оболонкою максимальної лінійно незалежної підсистеми  $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_k\}$  цієї системи.

#### Доведення:

Очевидно  $L(\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}, \dots, \overline{b_k}) \subseteq L(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n})$ , тому що  $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}, \dots, \overline{b_k}\} \subseteq \{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$ . З іншої сторони, довільний вектор  $\overline{x} \in L(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n})$  є лінійною комбінацією векторів  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}$ , а кожен вектор  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ , є лінійною комбінацією векторів  $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}, \dots, \overline{b_k}$  (лема 2.1). В силу леми 1.1,  $\overline{x}$  є лінійною комбінацією векторів  $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}, \dots, \overline{b_k}$ , тобто  $\overline{x} \in L(\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}, \dots, \overline{b_k})$ .

Таким чином,  $L(\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}, \dots, \overline{b_k}) \supseteq L(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n})$ . Враховуючи обернене включення, отримаємо, що  $L(\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}, \dots, \overline{b_k}) = L(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n})$ .

Лема доведена.

### ТЕОРЕМА 2.3

Лінійна оболонка системи векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  векторного простору V над полем F є підпростором простору V.

Доведення:

Нехай  $W = L(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n})$ ,  $\overline{x} \in W$ ,  $\overline{y} \in W$  - довільні вектори з W і  $\lambda$  - довільний скаляр поля F. Тоді  $\overline{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \overline{a_i}$ ,  $\overline{y} = \sum_{i=1}^m \beta_i \overline{a_i}$ ; тому  $\overline{x} + \overline{y} = \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) \overline{a_i} \in W$  і  $\lambda \overline{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \overline{a_i} \in W$ . В силу теореми 2.2,  $W = L(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n})$  є підпростором простору V.

Виявляється, що всілякий підпростір векторного простору V може бути представлений як лінійна оболонка деякої системи векторів простору V. Справді, нехай W - підпростір простору V і  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \dots, \overline{e_n}\}$  - його базис. Тоді очевидно, що  $W = L(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \dots, \overline{e_n})$ .

Відмітимо ще, що розмірність підпростору W векторного простору V не перевищує розмірності V. Це випливає з леми 1.4.

### ЛЕМА 2.7

Якщо U і W - підпростори векторного простору V,  $U \subseteq W$ , і  $\dim U = \dim W$ , то U=W.

Доведення:

Якщо  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \dots, \overline{e_n}\}$  - базис підпростору U, то в силу рівності розмірностей підпросторів U і W вказана система векторів є базисом простору W. Тому  $W = L(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \dots, \overline{e_n}) = U$ , що і треба було довести.



### ЗАДАЧА 2.2

Використовуючи отримані результати, підрахуємо кількість всіх можливих базисів у просторі  $V$  розмірності  $n$  над полем  $Z_p$ . В силу наслідку з леми 2.5, кожен лінійно незалежний систему векторів простору  $V$  можна доповнити до базису всього простору  $V$ . Тому довільний базис в просторі  $V$  будемо будувати таким чином: спочатку беремо довільну лінійно незалежну систему, яка складається з одного вектора  $\{\overline{a_1}\}$ . Потім знаходимо довільну лінійно незалежну систему, яка містить два вектори, один з яких дорівнює  $\overline{a_1} : \{\overline{a_1}, \overline{a_2}\}$ . Потім будемо довільну лінійно незалежну систему  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}\}$ , яка складається з 3-х векторів і містить попередню систему  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}\}$  і т.д.

Вектором  $\overline{a_1}$  може бути будь-який ненульовий вектор простору  $V$ . Так як простір  $V$  містить  $p^n$  елементів, то вектор  $\overline{a_1}$  можна вибрати  $p^n - 1$  способом. В силу властивості 2 лінійної залежності, система  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}\}$  лінійно незалежна тоді і тільки тоді, коли  $\overline{a_2} \notin L(\overline{a_1})$ , тобто  $\overline{a_2} \in V - L(\overline{a_1})$ . Множина  $V - L(\overline{a_1})$  містить  $p^n - p$  елементів (одномірний підпростір  $L(\overline{a_1})$  складається з  $p$  елементів). Таким чином, для вибору системи  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}\}$  маємо  $(p^n - 1)(p^n - p)$  можливостей. Доведемо індукцією по  $k$ , що число всіх можливих лінійно незалежних систем  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_k}\}$  дорівнює  $(p^k - 1)(p^k - p)(p^k - p^2) \dots (p^k - p^{k-1})$ . Якщо це справедливо, то в лінійно незалежній системі  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}}\}$  вектором  $\overline{a_{k+1}}$  може бути будь-який вектор з множини  $V - L(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_k})$ . Остання множина містить  $p^n - p^k$  елементів. Отже лінійно незалежну систему векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}}\}$  можна вибрати  $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^k)$  способом. Тому для вибору базису  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  простору  $V$  існує  $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^{n-1})$  можливостей. В процесі побудови отримано різні упорядковані базиси простору  $V$ . Якщо базиси, які складаються з одних і тих самих векторів, але упорядковані різними способами, вважати однаковими, то всього в просторі  $V$  розмірності  $n$  над полем  $Z_p$  існує  $\frac{1}{n!}(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^{n-1})$  різних базисів.

### ЗАДАЧА 2.3

Підрахуємо кількість різних підпросторів розмірності  $k$  у векторному просторі  $V$

розмірності  $n$  над полем  $Z_p$ . Як було відмічено, довільний підпростір  $U$  розмірності  $k$  в просторі  $V$  є лінійна оболонка лінійно незалежної системи векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_k\}$ :  $U = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_k)$ . Згідно з попередньою задачею існує  $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^{k-1})$  можливостей для вибору системи  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_k\}$ . При цьому, якщо  $L(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_k) = U$ , де  $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_k\}$  - лінійно незалежна система векторів, то ця система є базисом підпростору  $U$ . Таким чином, кількість лінійно незалежних систем  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_k\}$ , лінійні оболонки яких співпадають з одним і тим же підпростором розмірності  $k$ , дорівнює кількості впорядкованих базисів цього підпростору, тобто в силу попередньої задачі дорівнює  $(p^k - 1)(p^k - p)(p^k - p^2) \dots (p^k - p^{k-1})$ .

Отже, кількість всіх можливих підпросторів розмірності  $k$  в  $n$ -мірному векторному просторі над полем  $Z_p$  дорівнює :

$$\frac{(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^{k-1})}{(p^k - 1)(p^k - p)(p^k - p^2) \dots (p^k - p^{k-1})} = \frac{(p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \dots (p^{n-k+1} - 1)}{(p^k - 1)(p^{k-1} - 1) \dots (p - 1)}$$

#### ЛЕМА 2.8

Теоретико-множинний перетин підпросторів  $U$  і  $W$  векторного простору  $V$  над полем  $F$  також є підпростором простору  $V$ .

#### Доведення:

Нехай  $T = U \cap W$ . Множина  $T$  непуста, тому що  $\bar{0} \in T$ . Якщо  $\bar{a} \in T$ ,  $\bar{b} \in T$  - два довільних вектора з множини  $T$ , то  $\bar{a} \in U$ ,  $\bar{b} \in U$ , а значить  $\bar{a} + \bar{b} \in U$ , тому, що  $U$  - підпростір в просторі  $V$ . Точно так само  $\bar{a} + \bar{b} \in W$ . Отже,  $\bar{a} + \bar{b} \in T = U \cap W$ . Аналогічно доводиться, що для будь-якого вектора  $\bar{a}$  і будь-якого скаляра  $\lambda \in F$ , вектор  $\lambda \bar{a} \in F$ . В силу теореми 2.2,  $T$  - підпростір векторного простору  $V$ .

Відмітимо, що теоретико-множинне об'єднання підпросторів  $U$  і  $W$  векторного простору  $V$  буде підпростором тоді і тільки тоді, коли одне з них міститься в іншому. Достатність цього твердження очевидна. Для доведення необхідності відмітимо, що якщо  $U$  не включається в  $W$  і  $W$  не включається в  $U$ , то існує вектор  $\bar{a} \in U - W$  і вектор  $\bar{b} \in W - U$ . Тоді  $\bar{a} \in U \cup W$ ,  $\bar{b} \in U \cup W$ , але  $\bar{a} + \bar{b} \notin U \cup W$ .

Аналогом дії об'єднання для векторного простору  $V$  служить дія додавання підпросторів.

#### ОЗНАЧЕННЯ 2.10.

Сумою підпросторів  $U$  і  $W$  векторного простору  $V$  називається множина  $E$  всіх можливих сум виду  $\bar{u} + \bar{w}$ , де  $\bar{u} \in U$ ,  $\bar{w} \in W$ .

Для суми підпросторів  $U$  і  $W$  будемо використовувати символ  $U+W$ .

ТЕОРЕМА 2.4

Сума підпросторів  $U$  і  $W$  векторного простору  $V$  над полем  $F$  є підпростором простору  $V$ .

Доведення:

Так як  $\bar{0} \in U \cap W$ , то  $\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} \in U + W$ . Нехай  $\bar{a} \in U + W$ ,  $\bar{b} \in U + W$ , тоді  $\bar{a} = \bar{u}_1 + \bar{w}_1$ ,  $\bar{b} = \bar{u}_2 + \bar{w}_2$ . Тому  $\bar{a} + \bar{b} = (\bar{u}_1 + \bar{w}_1) + (\bar{u}_2 + \bar{w}_2) = (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) + (\bar{w}_1 + \bar{w}_2) \in U + W$ , тому що  $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 \in U$ ,  $\bar{w}_1 + \bar{w}_2 \in W$ . Аналогічно доводиться, що для будь-якого скаляра  $\lambda \in F$ ,  $\lambda \bar{a} \in U + W$ . В силу теореми 2.2,  $U+W$  - підпростір векторного простору  $V$ .

Методом математичної індукції можна визначити суму будь-якої скінченної множини підпросторів векторного простору  $V$ . Неважко при цьому довести, що дія додавання підпросторів асоціативна, тобто  $(U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3)$ , де  $U_i$  - підпростір векторного простору  $V$ ,  $i=1, 2, 3$ .

ТЕОРЕМА 2.5

Розмірність суми двох підпросторів  $U$  і  $W$  векторного простору дорівнює сумі розмірностей підпросторів  $U$  і  $W$  мінус розмірність перетину  $U \cap W$ .

Доведення:

Нехай  $T = U \cap W$  і нехай  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_k\}$  - базис підпростору  $T$ . З того, що  $T \subset U$ , випливає, що базис  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_k\}$  можна включити в базис підпростору  $U$ . Нехай  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_k, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_m\}$  - базис підпростору  $U$ . Так само можна взяти базис  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_k, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \dots, \bar{w}_l\}$  підпростору  $W$ . Отже,  $\dim U = k + m$ ,  $\dim W = k + l$ ,  $\dim U \cap W = k$ . Для доведення теореми потрібно встановити, що  $\dim(U + W) = k + l + m$ . Остання рівність очевидна, якщо базисом підпростору  $U+W$  є множина:

$$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_k, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_m, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \dots, \bar{w}_l\} \quad (2.3)$$

Доведемо це. Встановимо спочатку лінійну незалежність системи (2.3).

Нехай:

$$\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3 + \dots + \alpha_k \bar{e}_k + \beta_1 \bar{u}_1 + \beta_2 \bar{u}_2 + \beta_3 \bar{u}_3 + \dots + \beta_m \bar{u}_m + \gamma_1 \bar{w}_1 + \gamma_2 \bar{w}_2 + \gamma_3 \bar{w}_3 + \dots + \gamma_l \bar{w}_l = \bar{0}$$

Звідси:

$$\alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + \alpha_3 \overline{e_3} + \dots + \alpha_k \overline{e_k} + \beta_1 \overline{u_1} \beta_2 \overline{u_2} + \beta_3 \overline{u_3} + \dots + \beta_m \overline{u_m} = -\gamma_1 \overline{w_1} - \gamma_2 \overline{w_2} - \gamma_3 \overline{w_3} - \dots - \gamma_l \overline{w_l}$$

Вектор, що стоїть в лівій частині нерівності, належить  $U$ , а вектор з правої частини рівності належить  $W$ . Отже, обидва ці вектори належать  $T = U \cap W$ . Таким чином,

$$-\gamma_1 \overline{w_1} - \gamma_2 \overline{w_2} - \gamma_3 \overline{w_3} - \dots - \gamma_l \overline{w_l} = \delta_1 \overline{e_1} + \delta_2 \overline{e_2} + \delta_3 \overline{e_3} + \dots + \delta_k \overline{e_k}, \text{ тому що } \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \dots, \overline{e_k}\}$$

- базис підпростору  $T$ . Тому  $\delta_1 \overline{e_1} + \delta_2 \overline{e_2} + \delta_3 \overline{e_3} + \dots + \delta_k \overline{e_k} + \gamma_1 \overline{w_1} + \gamma_2 \overline{w_2} + \gamma_3 \overline{w_3} + \dots + \gamma_l \overline{w_l} = \overline{0}$

З того, що  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \dots, \overline{e_k}, \overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3}, \dots, \overline{w_l}\}$  базис підпростору  $W$ , отримаємо

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \dots = \delta_k = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_l = 0. \quad \text{Звідси} \quad \text{впливає,} \quad \text{що}$$

$$\alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + \alpha_3 \overline{e_3} + \dots + \alpha_k \overline{e_k} + \beta_1 \overline{u_1} \beta_2 \overline{u_2} + \beta_3 \overline{u_3} + \dots + \beta_m \overline{u_m} = \overline{0}.$$

Оскільки  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \dots, \overline{e_k}, \overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}, \dots, \overline{u_m}\}$  - базис підпростору  $U$ , то

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_m = 0. \quad \text{Отже в будь-якій нульовій лінійній}$$

комбінації векторів  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \dots, \overline{e_k}, \overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}, \dots, \overline{u_m}, \overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3}, \dots, \overline{w_l}\}$  всі

коефіцієнти дорівнюють нулю, тобто вказана система векторів лінійно незалежна. З іншої

сторони, довільний вектор  $\overline{x} \in U + W$  можна записати у вигляді  $\overline{u} + \overline{w}$ , де  $\overline{u} \in U$ ,  $\overline{w} \in W$ . З

того що кожен з векторів  $\overline{u}$  і  $\overline{w}$  лінійно виражається через систему векторів

$\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \dots, \overline{e_k}, \overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}, \dots, \overline{u_m}, \overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3}, \dots, \overline{w_l}\}$  випливає, що через цю систему

лінійно виражається і вектор  $\overline{x}$ . Отже, вказана система векторів є максимальною лінійно

незалежною в просторі  $U+W$ , тобто є базисом простору  $U+W$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 2.11.

Сума підпросторів  $U$  і  $W$  векторного простору  $V$  називається прямою, якщо

$$U \cap W = \{\overline{0}\}. \quad \text{Для прямої суми підпросторів } U \text{ і } W \text{ будемо використовувати символ } U \oplus W.$$

### ЛЕМА 2.9

$$\left| \begin{array}{l} \text{Якщо } S = U \oplus W, \text{ то } \dim S = \dim U + \dim W. \end{array} \right.$$

Доведення:

З того, що  $U \cap W = \{\overline{0}\}$ , то  $\dim U \cap W = 0$ , в силу теореми  $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$ .

### ТЕОРЕМА 2.6

$$\left| \begin{array}{l} \text{Для того, щоб сума підпросторів } U \text{ і } W \text{ векторного простору } V \text{ була прямою,} \\ \text{необхідно і достатньо, щоб будь-який вектор } \overline{x} \in U + W \text{ можна було представити} \end{array} \right.$$

єдиним способом у вигляді  $\bar{x} = \bar{u} + \bar{w}$ , де  $\bar{u} \in U$ ,  $\bar{w} \in W$ .

Доведення:

*Необхідність.*

Якщо  $S = U \oplus W$ , то  $U \cap W = \{\bar{0}\}$ . Нехай  $\bar{x} \in S$ ; тоді  $\bar{x} = \bar{u}_1 + \bar{w}_1$ , де  $\bar{u}_1 \in U$ ,  $\bar{w}_1 \in W$ . Припустимо, що  $\bar{x} = \bar{u}_2 + \bar{w}_2$ , де  $\bar{u}_2 \in U$ ,  $\bar{w}_2 \in W$ . Звідси отримаємо:  $\bar{u}_1 + \bar{w}_1 = \bar{u}_2 + \bar{w}_2$ , або  $\bar{u}_1 - \bar{u}_2 = \bar{w}_1 - \bar{w}_2 \in U \cap W$ ; таким чином  $\bar{u}_1 - \bar{u}_2 = \bar{w}_1 - \bar{w}_2 = \bar{0}$ , а тому  $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ ;  $\bar{w}_1 = \bar{w}_2$ . Необхідна умова доведена.

*Достатність:*

Нехай довільний вектор  $\bar{x} \in S = U + W$  можна однозначно записати у вигляді  $\bar{x} = \bar{u} + \bar{w}$ , де  $\bar{u} \in U$ ,  $\bar{w} \in W$ . Припустимо, що  $\bar{a} \in U \cap W$ . Вектор  $\bar{0}$ , який належить підпростору  $S = U + W$  можна представити у вигляді  $\bar{0} = \bar{0} + \bar{0}$ , і  $\bar{0} = \bar{a} + (-\bar{a})$ , причому перші доданки в обох рівностях належать підпростору  $U$ , а другі - підпростору  $W$ . З однозначності представлення вектора  $\bar{0}$  випливає, що  $\bar{a} = \bar{0}$ .

Теорема доведена.

Поняття прямої суми розповсюджується на суму 3-х і більше підпросторів так: сума підпросторів  $U_1, U_2, \dots, U_k$  векторного простору  $V$  називається прямою, якщо перетин кожного підпростору  $U_i$  з сумою інших підпросторів є нульовий простір  $\{\bar{0}\}$ .

Пряма сума підпросторів  $U_1, U_2, \dots, U_k$ , як і вище, позначається через  $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$ .

Міркуючи так само, як і в теоремі 2.6, можна довести, що сума  $S = U_1 + U_2 + \dots + U_k$  є прямою тоді і тільки тоді, коли кожен вектор  $\bar{x} \in S$  однозначно був представлений у вигляді:  $\bar{x} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \dots + \bar{u}_k$ ,  $\bar{u}_i \in U_i$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ .

## Лінійні многовиди

### ОЗНАЧЕННЯ 2.12.

Нехай  $U$  - підпростір векторного простору  $V$  над деяким полем  $P$  і  $\bar{x} \in V$ . Лінійним многовидом в просторі  $V$  називається множина  $U + \bar{x}$ , що складається з усіх можливих векторів

виду  $\bar{u} + \bar{x}$ ,  $\bar{u} \in U$ ;  $U + \bar{x} = \{\bar{u} + \bar{x} \mid \bar{u} \in U\}$ .

Лінійний многовид являє собою "зсув" підпростору  $U$  на вектор  $\bar{x}$ . Якщо  $\bar{x} \notin U$ , то лінійний многовид  $U + \bar{x}$  не є підпростором векторного простору  $V$ , тому що в цьому випадку  $\bar{0} \notin U + \bar{x}$ .

Очевидно, якщо  $\bar{a} \in U + \bar{x}$ ,  $\bar{b} \in U + \bar{x}$ , то  $\bar{a} - \bar{b} \in U$ . Крім того, будь-який вектор  $\bar{u} \in U$  можна представити у вигляді різниці двох векторів  $\bar{a} \in U + \bar{x}$ ,  $\bar{b} \in U + \bar{x}$ . Дійсно,  $\bar{u} = \bar{a} - \bar{b}$ , де  $\bar{a} = \bar{u} + \bar{x} \in U + \bar{x}$ ,  $\bar{b} = \bar{0} + \bar{x} \in U + \bar{x}$ . Звідси випливає, що якщо два лінійних многовиди  $U + \bar{x}$  і  $W + \bar{y}$  векторного простору  $V$  рівні, тобто  $U + \bar{x} = W + \bar{y}$ , то  $U = W$ . Таким чином, лінійний підпростір  $U$ , про який говориться в означенні лінійного многовиду, визначений цим многовидом однозначно. Навпаки, за вектор  $\bar{y}$ , що визначає лінійний многовид  $U + \bar{x}$ , можна взяти будь-який вектор цього многовиду. Справді, якщо  $\bar{y} \in U + \bar{x}$ , то  $\bar{y} = \bar{u}_0 + \bar{x}$ ,  $\bar{u}_0 \in U$ . Тоді  $\bar{u} + \bar{y} = \bar{u} + (\bar{u}_0 + \bar{x}) = (\bar{u} + \bar{u}_0) + \bar{x} \in U + \bar{x}$ , або  $U + \bar{y} \subset U + \bar{x}$ . З іншої сторони, якщо  $\bar{z}$  - довільний вектор з  $U + \bar{x}$ , то  $\bar{z} = \bar{u}_1 + \bar{x}$ ,  $\bar{u}_1 \in U$ . Тому  $\bar{z} = (\bar{u}_1 - \bar{u}_0) + (\bar{u}_0 + \bar{x}) = (\bar{u}_1 - \bar{u}_0) + \bar{y} \in U + \bar{y}$ . Отже,  $U + \bar{x} \subset U + \bar{y}$ , а значить  $U + \bar{x} = U + \bar{y}$ .

## Матриці і дії над ними

Матрицею розміру  $m \times n$  будемо називати таблицю, що складається з елементів деякого поля  $P$ , яка містить  $m$  рядків і  $n$  стовпців:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \quad \alpha_{ij} \in P, i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$$

Скаляри  $\alpha_{ij} \in P$  називаються елементами матриці. Кожен елемент матриці має два індекси, перший з яких вказує номер рядка, що містить вказаний елемент, а другий - номер стовпця. Очевидно, всі елементи деякого рядка даної матриці мають однаковий перший індекс, а всі елементи деякого стовпця - однаковий другий індекс.

Позначати матриці будемо великими латинськими буквами -  $A, B, C$  і т.д. Будемо казати, що матриця  $A$  має розміри  $m \times n$ , якщо  $A$  містить  $m$  рядків,  $n$  стовпців. У випадку  $m \neq n$  матрицю  $A$  називають прямокутною. Якщо  $m = n$ , то матриця  $A$  називається квадратною порядку  $m$  ( $m$  - число рядків і стовпців матриці  $A$ ).

Якщо відомі розміри матриці, то матрицю

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{можна записати коротко у вигляді } A=(\alpha_{ij}).$$

Матриці  $A$  і  $B$  однакового розміру  $m \times n$  будемо називати рівними, якщо рівними будуть відповідні елементи цих матриць; таким чином, якщо

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mn} \end{bmatrix}$$

і  $A=B$ , то  $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$  для будь-яких  $i, j$ :  $i=1, 2, \dots, m$ ;  $j=1, 2, \dots, n$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 3.1.

Сумою двох матриць  $A=(\alpha_{ij})$  і  $B=(\beta_{ij})$  однакового розміру  $m \times n$  називається матриця  $C=(\gamma_{ij})$  того ж розміру  $m \times n$ , кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів даних матриць:  $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ;  $j=1, 2, \dots, n$ . Записують  $C=A+B$ .

Очевидно, що дія додавання матриць має комутативну і асоціативну властивості:  $A+B=B+A$  і  $(A+B)+C=A+(B+C)$ , тому що ці властивості має дія додавання елементів поля  $P$ .

Матриця розміру  $m \times n$ , всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою матрицею:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Відносно дії додавання матриць нульова матриця  $O$  є нейтральною, тобто для будь-якої матриці  $A$  розміру  $m \times n$  справедлива рівність  $A+O=A$ . Крім того, якщо позначити через  $(-A)$  матрицю, кожен елемент якої є протилежним відповідному елементу матриці  $A$ , то очевидно  $A+(-A)=O$ ;  $-A=(-\alpha_{ij})$ . Матрицю  $A$  називають протилежною матриці  $A$ .

Примітка. Дія додавання матриць різних розмірів не визначена.

### ОЗНАЧЕННЯ 3.2.

Добутком матриці  $A=(\alpha_{ij})$  розміру  $m \times n$  на скаляр  $\lambda \in P$ , називається матриця  $B$  розміру  $m \times n$ , елементи якої отримані з відповідних елементів матриці  $A$  множенням на скаляр  $\lambda$ :  $B=(\beta_{ij})$ , де  $\beta_{ij}=\lambda \alpha_{ij}$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ;  $j=1, 2, \dots, n$ .

З аналогічних властивостей операцій додавання і множення в полі  $P$  легко отримати наступні властивості операцій над матрицями:

1.  $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ ;
2.  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ ;
3.  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ ;
4.  $1A=A$ .

З цих властивостей і наведених вище властивостей операцій додавання матриць випливає, що всі матриці розміру  $m \times n$  з елементами поля  $P$  утворюють векторний простір над цим полем відносно додавання матриць і множення матриць на скаляри з  $P$ .

### ЗАДАЧА 3.1



Нехай  $M$  - множина всіх матриць розміру  $m \times n$  з коефіцієнтами з поля  $P$ . Позначимо через  $E_{ij}$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ;  $j=1, 2, \dots, n$  матрицю, в якій елемент, що стоїть на перетині рядка з номером  $i$  та стовпця з номером  $j$ , дорівнює 1, а всі інші елементи дорівнюють нулю. Довести, що множина  $M$  є векторним простором розмірності  $m \times n$  над полем  $P$ , а множина матриць  $\{E_{ij}\}$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ;  $j=1, 2, \dots, n$ , є його базисом.

### ОЗНАЧЕННЯ 3.3

Нехай  $A=(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_k})$  матриця розміру  $1 \times k$  ( матриця-рядок) і  $B=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_k \end{bmatrix}$

матриця розміру  $k \times 1$  (матриця-стовпець).

Добутком матриць  $A$  і  $B$  називається скаляр  $\gamma$ , який дорівнює  $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \dots + \alpha_k\beta_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i\beta_i$ .

Відмітимо, що множити матрицю-рядок на матрицю-стовпець можна тільки в тому випадку, коли вони мають одну і ту ж кількість елементів.

### ОЗНАЧЕННЯ 3.4

Нехай  $A=(\alpha_{ij})$  матриця розміру  $m \times k$ , а  $B=(\beta_{ij})$  матриця розміру  $k \times n$ . Добутком матриці  $A$  на матрицю  $B$  називається матриця  $C=A \times B$  розміру  $m \times n$ , в якій елемент  $\gamma_{ij}$  дорівнює добутку рядка матриці з номером  $i$  на стовпець матриці  $B$  з номером  $j$ :

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \alpha_{i3}\beta_{3j} + \dots + \alpha_{ik}\beta_{kj} = \sum_{r=1}^k \alpha_{ir}\beta_{rj}.$$

### ЗАУВАЖЕННЯ

Добуток матриць  $AB$  означений тільки в тому випадку, коли число стовпців в лівому співмножнику  $A$  дорівнює числу рядків в правому співмножнику  $B$ . (В цьому випадку число елементів довільного рядка матриці  $A$  дорівнює числу елементів довільного стовпця матриці  $B$ ).

З цього зауваження випливає, що якщо  $m \neq n$ , то добуток  $AB$  матриці  $A$  розміру  $m \times k$  на матрицю  $B$  розміру  $k \times n$  означений, але добуток  $BA$  неозначений ( $m \neq n$ ).

Якщо ж  $m=n$ , але  $m \neq k$ , то означені обидва добутки  $AB$  і  $BA$ ,  $AB$  і  $BA$  квадратні матриці, причому матриця  $AB$  має порядок  $m$ , а матриця  $BA$  - порядок  $k$ . Оскільки  $m \neq k$ , то

$AB$  і  $BA$  не порівнюються одна з одною. (Ставити питання про рівність  $AB$  і  $BA$  немає потреби).

Розглянемо, нарешті, випадок, коли  $m=n=k$ , тобто  $A$  і  $B$  квадратні матриці порядку  $m$ . В цьому випадку  $AB$  і  $BA$  означені і обидві мають порядок  $m$ . Але при  $m>1$  рівність  $AB=BA$  в загальному випадку не виконується.

Справді, якщо  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  (основне поле - поле  $R$ ),  $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  
 $BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , і  $AB \neq BA$ . Отже, добуток квадратних матриць однакового розміру некомутативний.

Відмітимо ще одну особливість дії множення матриць, яка показує різницю між нею і дією множення елементів поля, а саме: добуток двох ненульових матриць може бути нульовою матрицею.

#### ПРИКЛАД

Розглянемо три матриці над полем  $R$ :

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Всі три матриці не нульові, але  $E_{11}E_{22} = E_{22}E_{11} = 0$ ,  $E_{11}E_{12} = E_{12}$ ,  $E_{12}E_{11} = 0$ ,  
 $E_{22}E_{12} = 0$ ,  $E_{12}E_{22} = E_{12}$ .

Наряду з відміченими "неприємними" властивостями, дія множення матриць має таку звичну властивість як асоціативність:  $A(BC) = (AB)C$  (у випадку, коли всі множення виконуються).

#### Доведемо цю рівність.

Нехай  $A = (\alpha_{ij})$  - матриця розміру  $m \times k$ , а  $B = (\beta_{ij})$  - матриця розміру  $k \times l$  і  $C = (c_{ij})$  - матриця розміру  $l \times n$ .

Нехай  $p_{ij}$  - довільний елемент матриці  $AB$  розміру  $m \times l$ ; тоді  $p_{ij} = \sum_{r=1}^k \alpha_{ir} \beta_{rj}$ . Якщо  $\sigma_{ij}$  - довільний елемент матриці  $(AB)C$  розміру  $m \times n$ , то  $\sigma_{ij} = \sum_{s=1}^l p_{is} \gamma_{sj} = \sum_{s=1}^l (\sum_{r=1}^k \alpha_{ir} \beta_{rj}) \gamma_{sj} =$   
 $\sum_{s=1}^l \sum_{r=1}^k \alpha_{ir} \beta_{rs} \gamma_{sj} = \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^l (\beta_{rs} \gamma_{sj}) \alpha_{ir} = \sum_{r=1}^k (\sum_{s=1}^l \beta_{rs} \gamma_{sj}) \alpha_{ir} = \sum_{r=1}^k \tau_{rj} \alpha_{ir} = \sum_{r=1}^k \alpha_{ir} \tau_{rj} = \mu_{ij}.$

Тут  $\tau_{rj} = \sum_{s=1}^l \beta_{rs} \gamma_{sj}$  - елемент матриці BC, який стоїть на перетині рядка з номером r і

стовпця з номером j. Звідси випливає, що  $\mu_{ij} = \sum_{r=1}^k \alpha_{ir} \tau_{rj}$  є елемент матриці A(BC) з i-го рядка і j-го стовпця. З того, що  $p_{ij} = \mu_{ij}$  для  $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ , отримаємо  $(AB)C=A(BC)$ , що і треба було довести.

Додавання і множення матриць пов'язані законом дистрибутивності:  $A(B+C)=AB+AC$ ;  $(A+B)C=AC+BC$ . Мається на увазі, що всі вказані в цих рівностях дії виконуються. Обидві рівності доводяться однаково. Доведемо одне з них, наприклад перше.

Нехай  $A=(a_{ij})$  - матриця розміру  $k \times m$ , а  $B=(b_{ij})$  і  $C=(c_{ij})$  - матриці розміру  $m \times n$ . Тоді, якщо  $\lambda_{ij}$  - довільний елемент матриці  $B+C$ , то  $\lambda_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$ . Нехай  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}$  - довільні елементи матриць  $A(B+C), AB, AC$  - відповідно. Тоді за означенням добутку матриць:  $\alpha_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} \lambda_{rj}; \quad \beta_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} b_{rj}; \quad \gamma_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} c_{rj}$ . Так як  $\lambda_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$ , то  $\alpha_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} \lambda_{rj} = \sum_{r=1}^m a_{ir} (b_{rj} + c_{rj}) = \sum_{r=1}^m (a_{ir} b_{rj} + a_{ir} c_{rj}) = \sum_{r=1}^m a_{ir} b_{rj} + \sum_{r=1}^m a_{ir} c_{rj} = \beta_{ij} + \gamma_{ij}$ , а отже,  $A(B+C)=AB+AC$ .

Нехай  $A$  - матриця порядку  $n$ ,  $n=S_1 + S_2 + \dots + S_t$ ,  $1 < S_i < n$ ,  $i=1, 2, \dots, t$ . Розіб'ємо матрицю  $A$  на клітини:  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{t1} & A_{t2} & \dots & A_{tt} \end{bmatrix}$ , де  $A_{ij}$  - матриця розміру  $S_i \times S_j$ ;  $i, j=1, 2, \dots, t$ . Очевидно  $A_{ii}$  - квадратна матриця порядку  $S_i$ . Матриці  $A_{ij}$  називаються клітинами матриці  $A$ , а сама матриця  $A$  - клітинною.

Нехай  $B$  - матриця порядку  $n$ , і  $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{t1} & B_{t2} & \dots & B_{tt} \end{bmatrix}$  - розбиття матриці  $B$  на

клітини, який має ту саму схему, що і розбиття матриці  $A$ , тобто клітина  $B_{ij}$  має розмір  $S_i \times S_j$ ,  $i, j=1, 2, \dots, t$ . Очевидно, для будь-яких  $i, j, k=1, 2, \dots, t$  визначені добутки клітин  $AB$ . Нехай  $r_0 = 0, r_1 = S_1, r_2 = S_1 + S_2, \dots, r_i = S_1 + S_2 + \dots + S_i, \dots, r_t = S_1 + S_2 + \dots + S_t$ .

### ЛЕМА 3.1

Добуток матриць АВ є клітинна матриця

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{t1} & C_{t2} & \dots & C_{tt} \end{bmatrix}, \text{ де } C_{km} = \sum_{j=1}^t A_{kj} B_{jm}; k, m=1, 2, \dots, t.$$

Доведення:

Нехай  $A=(\alpha_{ij})$ ,  $B=(\beta_{ij})$ ; розіб'ємо матрицю  $C=AB$  на клітини  $C_{ij}$  за тією ж схемою, за якою розбиті на клітини співмножники  $A$  і  $B$ , а саме: розмірність клітини  $C_{ij}$  дорівнює  $S_i \times S_j$ ,  $i, j=1, 2, \dots, t$ . Нехай  $C_{km}$  - довільна клітина матриці  $C$  і  $\gamma_{uv}$  - її довільний елемент,  $u=1, 2, \dots, S_k$ ,  $v=1, 2, \dots, S_m$ . Так як  $S_1 + S_2 + \dots + S_{k-1} = r_{k-1}$ , то  $\gamma_{uv}$  є елементом рядка з номером  $w = r_{k-1} + u$ . Так само  $\gamma_{uv}$  стоїть в стовпцеві матриці  $C$  з номером  $z = r_{k-1} + v$ .

Значить, за означенням добутку матриць  $A$  і  $B$ ,  $\gamma_{uv} = \sum_{j=1}^n a_{wj} b_{jz} =$

$$= \sum_{j=1}^{r_1} a_{wj} b_{jz} + \sum_{j=r_1+1}^{r_2} a_{wj} b_{jz} + \dots + \sum_{j=r_{t-1}+1}^{r_t} a_{wj} b_{jz} \quad (z_t = n). \text{ Позначимо через } \gamma_{uv}^p \text{ елемент } \sum_{j=r_{p-1}+1}^{r_p} a_{wj} b_{jz},$$

$p=1, 2, \dots, t$ . Тоді  $\gamma_{uv} = \sum_{p=1}^t \gamma_{uv}^p$ , при цьому неважко помітити, що  $\gamma_{uv}^p$  є елементом матриці

$A_{kp} B_{pm}$ , який стоїть на перетині рядка з номером  $u$ , і стовпця з номером  $v$ . В силу довільності

індексів  $u$  і  $v$ ,  $1 \leq u \leq S_k$ ,  $1 \leq v \leq S_m$  і співвідношення  $\gamma_{uv} = \sum_{p=1}^t \gamma_{uv}^p$ ,  $\gamma_{uv} \in C_{km}$ , отримуємо, що

$$C_{km} = \sum_{p=1}^t A_{kp} B_{pm}, \text{ що і потрібно було довести.}$$

### ОЗНАЧЕННЯ 3.5

Квадратна матриця  $D=(d_{ij})$  порядку  $m$  називається діагональною, якщо  $d_{ij}=0$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ;  $j=1, 2, \dots, m$ ,  $i \neq j$ . Діагональна матриця  $D$  має такий вигляд:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{mm} \end{bmatrix}$$

Таким чином, всі елементи діагональної матриці, що стоять поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю (головною діагоналлю називається діагональ квадратної матриці, що з'єднує її ліву верхню "вершину" з правою нижньою).

**Примітка.** Звісно в діагональній матриці деякі елементи головної діагоналі також можуть дорівнювати нулю. Зокрема, нульова квадратна матриця (матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю) також є діагональною.

Якщо  $A=(\alpha_{ij})$  - матриця розміром  $k \times m$ , то безпосередньою перевіркою можна впевнитись, що

$$AD = \begin{bmatrix} \alpha_{11}d_{11} & \alpha_{12}d_{22} & \dots & \alpha_{1m}d_{mm} \\ \alpha_{21}d_{11} & \alpha_{22}d_{22} & \dots & \alpha_{2m}d_{mm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1}d_{11} & \alpha_{k2}d_{22} & \dots & \alpha_{km}d_{mm} \end{bmatrix}$$

Таким чином, при множенні матриці  $A$  розміру  $k \times m$  справа на діагональну матрицю  $D$  порядку  $d$ , всі елементи  $j$ -го стовпця матриці  $A$  множаться на елемент  $d_{jj}$ ,  $j=1, 2, \dots, m$ . Аналогічно, якщо матрицю  $B$  розміру  $m \times n$  помножити зліва на діагональну матрицю  $D$  порядку  $m$ , то всі елементи  $r$ -го рядка множаться на  $d_{rr}$ ,  $r=1, 2, \dots, k$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 3.6

Діагональна матриця  $S$  називається скалярною, якщо всі елементи її головної діагоналі рівні між собою.

$$S = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix}$$

При множенні матриці  $A$  потрібного розміру зліва і справа на скалярну матрицю  $S$  всі елементи матриці  $A$  множаться на скаляр  $\alpha$ :  $AS=\alpha A$ ;  $SA=\alpha A$ .

Остання рівність оправдовує назву "скалярна" для матриці  $S$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 3.7

Діагональна матриця  $E$  називається одиничною, якщо всі елементи її головної діагоналі дорівнюють одиниці.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Так як одинична матриця є скалярною, для якої відповідний скаляр  $\alpha$  дорівнює 1, то має місце рівність  $EA=A$ ,  $BE=B$  (якщо дії множення у вказаних рівностях виконуються).

Зокрема, якщо  $E$  має порядок  $m$  і  $A$  - довільна квадратна матриця того ж порядку, то  $AE=EA=A$ , цими рівностями пояснюється назва "одинична" для матриці  $E$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 3.8

Квадратна матриця  $A$  називається матрицею, яка має обернену, якщо існує квадратна матриця  $B$ , така що  $AB=BA=E$ .

При цьому матриця  $B$  називається оберненою до матриці  $A$ .

Очевидно, якщо матриця  $B$  є оберненою до матриці  $A$ , то  $B$  також є матрицею, яка має обернену матрицю  $A$ . Тому матриці  $A$  і  $B$  називаються взаємно оберненими.

### ЛЕМА 3.2

Матриця  $A$  має єдину обернену матрицю  $B$ .

### Доведення:

Нехай  $B$  і  $C$  дві матриці, які є оберненими для матриці  $A$ . Тоді за означенням  $BA=AC=E$ . Тому  $(BA)C=EC=C$ . З іншої сторони,  $(BA)C=B(AC)=BE=B$ . отже,  $B=C$ .

### ПРИКЛАД 3.2

Діагональна матриця

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{mm} \end{bmatrix},$$

в якій жоден елемент головної діагоналі не дорівнює нулю, має обернену матрицю  $T$ , яка має вигляд:

$$T = \begin{bmatrix} d_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{mm}^{-1} \end{bmatrix}$$

Ясно, що нульова квадратна матриця не має оберненої (подібно тому, як нульовий елемент в полі не має оберненого). Але навіть ненульова матриця може не мати оберненої. Безпосередньою перевіркою можна впевнитись, що діагональна матриця порядку  $m$ ,  $m>1$ , не буде мати оберненої, якщо хоча б один з елементів її головної діагоналі дорівнює нулю. Необхідна і достатня умови оберненості квадратної матриці будуть встановлені далі.

### ОЗНАЧЕННЯ 3.9

Квадратна матриця  $A=(\alpha_{ij})$  матриця розміру  $m \times m$  називається верхньою (нижньою) трикутною матрицею, якщо  $\alpha_{ij}=0$  для  $i>j$  ( для  $i<j$ ),  $i=1, 2, \dots, m$ ;  $j=1, 2, \dots, m$ .

Таким чином, якщо  $A$  верхня трикутна матриця, то  $A$  має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{mm} \end{bmatrix}.$$

Аналогічно, якщо  $B$  - нижня трикутна матриця, то

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mm} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що діагональні матриці і тільки вони є як верхніми трикутними, так і нижніми трикутними матрицями. Доведемо, що добуток будь-якого числа верхніх (нижніх) трикутних матриць знову є верхньою (нижньою) трикутною матрицею. Достатньо це встановити для випадку двох співмножників  $A$  і  $B$ .

Нехай  $A=(\alpha_{ij})$ ,  $B=(\beta_{ij})$  - дві верхні трикутні матриці порядку  $m$ . За означенням верхньої трикутної матриці для  $i>j$ ,  $\alpha_{ij}=\beta_{ij}=0$ . Нехай  $c_{ij}$  - довільний елемент матриці  $AB$ . Тоді

$c_{ij} = \sum_{r=1}^m \alpha_{ir} \beta_{rj}$ . Нехай  $i>j$ . Якщо  $i>r$ , то  $\alpha_{ir}=0$  і  $\alpha_{ir} \beta_{rj}=0$ ; якщо ж  $i<r$ , то  $r>i>j$  і тоді  $\beta_{rj}=0$ . Таким

чином, кожен доданок в сумі  $\sum_{r=1}^m \alpha_{ir} \beta_{rj}$  дорівнює нулю при  $i>j$ , тобто  $c_{ij}=0$  для  $i>j$ . Отже, матриця  $AB$  є верхньою трикутною матрицею. Аналогічно доводиться відповідне твердження для нижніх трикутних матриць.

### ОЗНАЧЕННЯ 3.10

Нехай матриця  $A=(a_{ij})$  має розмір  $k \times m$ . Матриця  $B=(b_{rs})$  розміру  $m \times k$  називається транспонованою до матриці  $A$ , якщо  $b_{rs}=a_{sr}$ ,  $s=1, 2, \dots, k$ ,  $r=1, 2, \dots, m$ . Матриця, транспонована до матриці  $A$  позначається через  $A^t$ .

Таким чином, якщо

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{km} \end{bmatrix}, \text{ то } A^t = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{k1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{km} \end{bmatrix}$$

Має місце наступна властивість:

$(AB)^t = B^t A^t$ , тобто матриця, транспонована до добутку двох матриць, дорівнює добутку у зворотному порядку матриць, транспонованих до співмножників.

Доведемо цю властивість. Нехай  $A = (a_{ij})$  матриця розміру  $k \times m$ ,  $B = (b_{rs})$  розміру  $m \times n$ .

Якщо  $c_{ij}$  - довільний елемент матриці  $AB$ , то  $c_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} b_{rj}$ .

Нехай  $A^t = (u_{rs})$ ,  $r=1, 2, \dots, m$ ;  $s=1, 2, \dots, k$ ;  $B^t = (v_{rs})$ ,  $r=1, 2, \dots, n$ ;  $s=1, 2, \dots, m$ ;  $u_{rs} = a_{sr}$ ,  $v_{rs} = b_{sr}$ . З того, що число рядків матриці  $B$  дорівнює числу стовпців матриці  $A$ , то число стовпців матриці  $B^t$  дорівнює числу рядків матриці  $A^t$ .

Отже, добуток  $B^t A^t$  визначений і якщо  $d_{ij}$  - довільний елемент цього добутку, то  $d_{ij} =$

$$\sum_{t=1}^m v_{it} u_{tj} = \sum_{t=1}^m b_{ti} a_{jt} = \sum_{t=1}^m a_{jt} b_{ti} = c_{ij}.$$

Так як розміри матриці  $(AB)^t = (h_{ij})$ ,  $h_{ij} = c_{ij}$ , і матриці  $B^t A^t = (d_{ij})$  співпадають, причому  $h_{ij} = c_{ij} = d_{ij}$ , то рівність  $(AB)^t = B^t A^t$  доведено.



## Елементарні матриці

В попередньому розділі були введені матриці  $E_{ij}$ . Нагадаємо їхнє означення:  $E_{ij}$  - це матриця довільного розміру, в якій елемент, що стоїть на перетині рядка з номером  $i$  та стовпця з номером  $j$  дорівнює 1, а всі інші елементи дорівнюють нулю. Безпосередньо з означення добутку матриць отримаємо, що

$$E_{ij}E_{rs} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } j \neq r \\ E_{is}, & \text{якщо } j = r \end{cases} \quad (3.1)$$

Символом 0 позначена нульова матриця.

### ОЗНАЧЕННЯ 3.11.

Квадратна матриця  $A$  порядку  $m$  називається елементарною, якщо  $A = E + \lambda E_{ij}$ , де  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 < j < m$ ,  $i \neq j$ .

Будемо позначати  $A = E + \lambda E_{ij}$  через  $F_{ij}(\lambda)$ .

Очевидно, що всяка елементарна матриця є, або верхньою, або нижньою трикутною матрицею, в якій всі елементи головної діагоналі дорівнюють 1.

Сформулюємо і доведемо основні властивості елементарних матриць:

$$3.1. F_{ij}(\lambda)F_{ij}(\mu) = F_{ij}(\lambda + \mu), \text{ зокрема, } F_{ij}(\lambda)F_{ij}(\mu) = F_{ij}(\mu)F_{ij}(\lambda)$$

### Доведення.

$$\begin{aligned} F_{ij}(\lambda)F_{ij}(\mu) &= (E + \lambda E_{ij})(E + \mu E_{ij}) = E + \lambda E_{ij} + E + \mu E_{ij} + \lambda \mu E_{ij}E_{ij} = E + (\lambda + \mu)E_{ij} = \\ &= F_{ij}(\lambda + \mu), \text{ тому, що } i \neq j \text{ і } E_{ij}E_{ij} = 0 \end{aligned}$$

$$3.2. \text{Матриця } F_{ij}(\lambda) \text{ має обернену матрицю } F_{ij}(-\lambda).$$

$$3.3. F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu)F_{ij}(-\lambda)F_{ki}(-\mu) = F_{kj}(-\mu\lambda), \quad j \neq k.$$

### Доведення.

$$\begin{aligned} F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu)F_{ij}(-\lambda)F_{ki}(-\mu) &= [(E + \lambda E_{ij})(E + \mu E_{ki})][(E - \lambda E_{ij})(E - \mu E_{ki})] = \\ &= (E + \lambda E_{ij} + \mu E_{ki})(E - \lambda E_{ij} - \mu E_{ki}) = E + \lambda E_{ij} + \mu E_{ki} - \lambda E_{ij} - \mu E_{ki} - \lambda \mu E_{kj} = E - \lambda \mu E_{kj} = \\ &= F_{kj}(-\mu\lambda), \text{ що і потрібно було довести.} \end{aligned}$$

$$3.4. F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda)F_{ki}(-\mu)F_{ij}(-\lambda) = F_{kj}(\mu\lambda), \quad j \neq k.$$

Доводиться так само, як і попередня властивість.

$$3.5. \quad F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu) = F_{kj}(-\mu\lambda)F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda);$$

$$F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu) = F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda)F_{kj}(-\mu\lambda);$$

$$F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda) = F_{kj}(\mu\lambda)F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu);$$

$$F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda) = F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu)F_{kj}(\mu\lambda), \quad j \neq k$$

Доведення.

За властивістю 3.3,  $F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu)F_{ij}(-\lambda)F_{ki}(-\mu) = F_{kj}(-\mu\lambda)$ . Домножимо обидві частини цієї рівності на  $F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda)$ :  $F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu)F_{ij}(-\lambda)F_{ki}(-\mu) F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda) = F_{kj}(-\mu\lambda) F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda)$  або  $F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu) = F_{kj}(-\mu\lambda)F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda)$ , оскільки  $F_{ki}(\mu)F_{ki}(-\mu) = E$ ,  $F_{ij}(\lambda)F_{ij}(-\lambda) = E$ . Отже, перша рівність у властивості 3.5 доведена. Щоб отримати другу нерівність замінимо у співвідношенні 3.3  $\lambda$  на  $-\lambda$ , і  $\mu$  на  $-\mu$ :  $F_{ij}(-\lambda)F_{ki}(-\mu)F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu) = F_{kj}(-\mu\lambda)$ . Домножимо цю рівність зліва на  $F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda)$ :  $F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda) F_{ij}(-\lambda)F_{ki}(-\mu)F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu) = F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda) F_{kj}(-\mu\lambda)$ ; звідси  $F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu) = F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda) F_{kj}(-\mu\lambda)$ .

Третю рівність можна отримати з першої, якщо домножити її зліва на  $F_{kj}(\mu\lambda)$ . Аналогічно четверту рівність отримаємо з другої за допомогою множення на  $F_{kj}(\mu\lambda)$  справа.

3.6. Якщо  $j \neq k$ ,  $i \neq m$ , то  $F_{ij}(\lambda)F_{km}(\mu) = F_{km}(\mu)F_{ij}(\lambda)$ .

Цю властивість легко отримати із співвідношення (3.1).

Для скорочення запису введемо наступне позначення:  $E(i, j) = E - E_{ii} - E_{jj}$ , де  $E$  - одинична матриця.

3.7. Якщо  $\mu \neq -\lambda$ , то  $F_{ij}(\lambda)F_{ji}(\mu) = F_{ji}(\sigma)F_{ij}(\tau)D$ , де  $\sigma = \mu(1 + \lambda\mu)^{-1}$ ,  $\tau = \lambda(1 + \lambda\mu)$ ,

$D$  - діагональна матриця  $D = \sum_{k=1}^m \gamma_k E_{kk}$ , причому  $\gamma_i = (1 + \lambda\mu)$ ,  $\gamma_j = (1 + \lambda\mu)^{-1}$ ,  $\gamma_s = 1$ ,

при  $s \neq i$ ,  $s \neq j$ .

Доведення.

Достатньо довести, що  $F_{ij}(-\lambda(1 + \lambda\mu))F_{ji}(-\mu(1 + \lambda\mu)^{-1})F_{ij}(\lambda)F_{ji}(\mu) = \sum_{k=1}^m \gamma_k E_{kk}$ . Маємо:

$$\begin{aligned} & F_{ij}(-\lambda(1 + \lambda\mu))F_{ji}(-\mu(1 + \lambda\mu)^{-1})F_{ij}(\lambda)F_{ji}(\mu) = (E - \lambda(1 + \lambda\mu)E_{ij})(E - \mu(1 + \lambda\mu)^{-1}E_{ji}) \times \\ & \times (E + \lambda E_{ij})(E + \mu E_{ji}) = (E - \lambda(1 + \lambda\mu)E_{ij} - \mu(1 + \lambda\mu)^{-1}E_{ji} + \lambda\mu E_{ii})(E + \lambda E_{ij} + \mu E_{ji} + \lambda\mu E_{ij}) = \\ & = E + \lambda E_{ij} + \mu E_{ji} + \lambda\mu E_{ii} - \lambda(1 + \lambda\mu)E_{ij} - \lambda\mu(1 + \lambda\mu)E_{ii} - \mu(1 + \lambda\mu)^{-1}E_{ji} - \lambda\mu(1 + \lambda\mu)^{-1}E_{jj} - \\ & - \lambda\mu^2(1 + \lambda\mu)^{-1}E_{ji} + \lambda\mu E_{ii} + \lambda^2\mu E_{ij} + \lambda^2\mu^2 E_{ii} = E + (\lambda - \lambda - \lambda^2\mu + \lambda^2\mu)E_{ij} + \\ & + (\mu - \mu(1 + \lambda\mu)^{-1} - \lambda\mu^2(1 + \lambda\mu)^{-1})E_{ji} + (\lambda\mu - \lambda\mu - \lambda^2\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2\mu^2)E_{ii} - \\ & - \lambda\mu(1 + \lambda\mu)^{-1}E_{jj} = \sum_{k \neq j, j}^m E_{kk} + (1 + \lambda\mu)E_{ii} + (1 + \lambda\mu)^{-1}E_{jj} = \sum_{k=1}^m \gamma_k E_{kk}, \quad \text{де} \quad \gamma_i = (1 + \lambda\mu), \\ & \gamma_j = (1 + \lambda\mu)^{-1}, \gamma_s = 1, \text{ при } s \neq i, s \neq j \text{ що і потрібно було довести.} \end{aligned}$$

3.8. Якщо  $D$  - діагональна матриця,  $D = \sum_{k=1}^m \gamma_k E_{kk}$ ,  $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_m \neq 0$ , то

$$F_{ij}(\mu)D = DF_{ij}(\mu\gamma_i^{-1}\gamma_j), \quad DF_{ij}(\mu) = F_{ij}(\mu\gamma_j\gamma_i^{-1})D.$$

Доведення.

Справді:

$$F_{ij}(\mu)D = (E + \mu E_{ij})D = D + \mu E_{ij}D = D + \mu E_{ij} \left( \sum_{k=1}^m \gamma_k E_{kk} \right) = D + \mu \gamma_j E_{ij} = D + \mu \gamma_j \gamma_i^{-1} \times$$

$$\times \left( \sum_{k=1}^m \gamma_k E_{kk} \right) E_{ij} = D + \mu \gamma_i^{-1} \gamma_j D E_{ij} = D(E + \mu \gamma_i^{-1} \gamma_j E_{ij}) = DF_{ij}(\mu \gamma_i^{-1} \gamma_j). \quad \text{Друге}$$

співвідношення є наслідком 1, якщо врахувати, що  $D^{-1} = \sum_{k=1}^m \gamma_k^{-1} E_{kk}$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 3.12.

Будемо називати нормальною матрицю наступного вигляду:

$$L_{ij}(\lambda) = E(i, j) + \lambda E_{ij} - \lambda^{-1} E_{ji}; \text{ тут мається на увазі, що } i \neq j.$$

З означення випливає, що  $L_{ji}(\lambda) = L_{ij}(-\lambda^{-1})$ .

3.9. Якщо  $i \neq j$ , то  $L_{ij}(\lambda)L_{ij}(\mu) = D = \sum_{k=1}^m \gamma_k E_{kk}$ , де  $\gamma_i = -\lambda\mu^{-1}$ ,  $\gamma_j = -\lambda^{-1}\mu$ ,  $\gamma_k = 1$  при  $k \neq i, k \neq j$ .

Доведення.

Безпосередньою перевіркою можна впевнитися, що  $E(i, j)E_{ij} = 0$ ,  $E(i, j)E_{ji} = 0$ ,  $E_{ij}E(i, j) = 0$ ,  $E_{ji}E(i, j) = 0$ , де символ 0 позначає нульову матрицю. Крім того,  $E(i, j)E(i, j) = E(i, j)$ . Тому  $L_{ij}(\lambda)L_{ij}(\mu) = (E(i, j) + \lambda E_{ij} - \lambda^{-1} E_{ji})(E(i, j) + \mu E_{ij} - \mu^{-1} E_{ji}) =$   
 $= E(i, j) - \lambda\mu^{-1} E_{ii} - \lambda^{-1} \mu E_{jj} = D = \sum_{k=1}^m \gamma_k E_{kk}$ , причому  $\gamma_i = -\lambda\mu^{-1}$ ,  $\gamma_j = -\lambda^{-1}\mu$ ,  $\gamma_k = 1$  при  $k \neq i, k \neq j$ , що і потрібно було довести.

3.10. Нормальна матриця  $L_{ij}(\lambda)$  має обернену матрицю  $L_{ij}(-\lambda)$ .

Ця властивість є наслідком попередньої.

3.11. Якщо  $i \neq j$ , то  $F_{ij}(\lambda)F_{ji}(-\lambda^{-1})F_{ij}(\lambda) = L_{ij}(\lambda)$ .

Доведення.

$$F_{ij}(\lambda)F_{ji}(-\lambda^{-1})F_{ij}(\lambda) = (E + \lambda E_{ij})(E - \lambda^{-1} E_{ji})(E + \lambda E_{ij}) = (E - \lambda^{-1} E_{ji} + \lambda E_{ij} - E_{ii})(E + \lambda E_{ij}) =$$

$$E - \lambda^{-1} E_{ji} + \lambda E_{ij} - E_{jj} + \lambda E_{ij} - E_{ii} - \lambda E_{ij} = E - E_{ii} - E_{jj} + \lambda E_{ij} - \lambda^{-1} E_{ji} = E(i, j) + \lambda E_{ij} - \lambda^{-1} E_{ji} =$$

$$= L_{ij}(\lambda), \text{ що і потрібно було довести.}$$

3.12.  $F_{ij}(\lambda)F_{ji}(-\lambda^{-1}) = L_{ij}(\lambda)F_{ij}(-\lambda)$ .

Доведення.

Для доведення достатньо домножити рівність з попередньої властивості на елементарну матрицю  $F_{ji}(-\lambda)$  і врахувати, що ця матриця є оберненою для  $F_{ij}(\lambda)$ .

$$3.13. \text{Якщо } k \neq j, \text{ то } L_{ij}(\lambda) F_{ik}(\mu) L_{ij}(-\lambda) = F_{jk}(-\lambda^{-1}\mu);$$

$$L_{ij}(\lambda) F_{ki}(\mu) L_{ij}(-\lambda) = F_{kj}(-\lambda\mu)$$

Доведення.

Відмітимо, що з означення базисних матриць  $E_{ij}$  і матриць  $E(i,j)$  безпосередньо випливають такі рівності:  $E_{ik} E(i,j) = E_{ik}$ ,  $E_{kj} E(i,j) = E(i,j) E_{ik} = 0$ ,  $E(i,j) E_{kj} = E_{kj}$ ,  $k \neq j$ ,  $k \neq i$ . Тому  $L_{ij}(\lambda) F_{ik}(\mu) L_{ij}(-\lambda) = (E(i,j) + \lambda E_{ij} - \lambda^{-1} E_{ji})(E + \mu E_{ik})(E(i,j) - \lambda E_{ij} + \lambda^{-1} E_{ji}) = (E(i,j) + \lambda E_{ij} - \lambda^{-1} E_{ji} - \lambda^{-1} \mu F_{jk})(E(i,j) - \lambda E_{ij} + \lambda^{-1} E_{ji}) = E(i,j) + E_{ii} + E_{jj} - \lambda^{-1} \mu E_{jk} = E - \lambda^{-1} \mu E_{jk} = F_{jk}(-\lambda^{-1}\mu)$ ; перша рівність доведена. Друга рівність доводиться так само.

$$3.14. \text{Якщо } k \neq i, i \neq m, k \neq j, j \neq \mu, \text{ то } L_{ij}(\lambda) F_{km}(\mu) L_{ij}(-\lambda) = F_{km}(\mu)$$

Доведення.

В силу властивості 3.11,  $F_{ij}(\lambda) F_{ji}(-\lambda^{-1}) F_{ij}(\lambda) = L_{ij}(\lambda)$ . Так як індекси  $i, j, k, m$  попарно різні, то за властивістю 3.6, елементарна матриця  $F_{km}$  комутує з матрицями  $F_{ij}(\lambda)$  і  $F_{ij}(-\lambda^{-1})$ , а значить,  $L_{ij}(\lambda) F_{km}(\mu) L_{ij}(-\lambda) = F_{km}(\mu) L_{ij}(\lambda) L_{ij}(-\lambda) = F_{km}(\mu)$ . Тут використано той факт, що матриці  $L_{ij}(\lambda)$  і  $L_{ij}(-\lambda)$  є взаємно оберненими, в силу властивості 3.10.

$$3.15. L_{ij}(\lambda) F_{ij}(\mu) L_{ij}(-\lambda) = F_{ji}(-\lambda^{-2}\mu);$$

$$L_{ij}(\lambda) F_{ji}(\mu) L_{ij}(-\lambda) = F_{ij}(-\lambda^{-2}\mu)$$

Доведення.

Маємо  $L_{ij}(\lambda) F_{ij}(\mu) L_{ij}(-\lambda) = (E(i,j) + \lambda E_{ij} - \lambda^{-1} E_{ji})(E + \mu E_{ij})(E(i,j) - \lambda E_{ij} + \lambda^{-1} E_{ji}) = (E(i,j) + \lambda E_{ij} - \lambda^{-1} E_{ji} - \lambda^{-1} \mu F_{ji})(E(i,j) - \lambda E_{ij} + \lambda^{-1} E_{ji}) = E(i,j) + E_{ii} + E_{jj} - \lambda^{-2} \mu E_{ji} = F_{ji}(-\lambda^{-2}\mu)$ .

Перше з даних співвідношень доведене. Другу рівність легко отримати з першої, якщо врахувати, що  $L_{ij}(\lambda) = L_{ji}(-\lambda^{-1})$ .

$$3.16. \text{Якщо } D - \text{діагональна матриця, } D = \sum_{k=1}^m \gamma_k E_{kk}, \quad \gamma_1 \cdot \gamma \cdot \dots \cdot \gamma_m \neq 0,$$

$$L_{ij}(\lambda) D = D L_{ij}(\lambda \gamma_i^{-1} \gamma_j).$$

Доведення.

В силу властивості 3.11,  $F_{ij}(\lambda) F_{ji}(-\lambda^{-1}) F_{ij}(\lambda) = L_{ij}(\lambda)$ . З другої сторони, за властивістю 3.8,  $F_{ij}(\lambda)D = DF_{ij}(\lambda\gamma_i^{-1}\gamma_j)$ ,  $F_{ji}(-\lambda^{-1})D = DF_{ji}(\lambda^{-1}\gamma_i\gamma_j^{-1})$ . Тому  $L_{ij}(\lambda)D = F_{ij}(\lambda) F_{ji}(-\lambda^{-1}) F_{ij}(\lambda)D = F_{ij}(\lambda) F_{ji}(-\lambda^{-1})D F_{ij}(\lambda\gamma_i^{-1}\gamma_j) = F_{ij}(\lambda)D F_{ji}(\lambda^{-1}\gamma_i\gamma_j^{-1}) \times F_{ij}(\lambda\gamma_i^{-1}\gamma_j) = DF_{ij}(\lambda\gamma_i^{-1}\gamma_j) F_{ji}(-\lambda^{-1}\gamma_i\gamma_j^{-1}) F_{ij}(\lambda\gamma_i^{-1}\gamma_j) = DL_{ij}(\lambda\gamma_i^{-1}\gamma_j)$ .

3.17. Якщо  $k \neq j$ , то  $L_{ij}(\lambda) L_{ik}(\mu) = L_{jk}(-\lambda^{-1}\mu) L_{ij}(\lambda)$ ;

$$L_{ij}(\lambda) L_{ik}(\mu) = L_{ik}(\mu) L_{kj}(-\lambda^{-1}\mu).$$

Доведення.

За властивістю 3.13,  $L_{ij}(\lambda) F_{ik}(\mu) L_{ij}(-\lambda) = F_{jk}(-\lambda^{-1}\mu)$ ,

$L_{ij}(\lambda) F_{ki}(-\mu^{-1}) L_{ij}(-\lambda) = F_{kj}(\lambda\mu^{-1})$ . Тому  $L_{ij}(\lambda) L_{ik}(\mu) L_{ij}(-\lambda) = L_{ij}(\lambda) F_{ik}(\mu) F_{ik}(-\mu^{-1}) \times F_{ik}(\mu) L_{ij}(-\lambda) = L_{ij}(\lambda) F_{ik}(\mu) L_{ij}(-\lambda) L_{ij}(\lambda) F_{ki}(-\mu^{-1}) F_{ik}(\mu) L_{ij}(-\lambda) = F_{jk}(-\lambda^{-1}\mu) L_{ij}(\lambda) F_{ki}(-\mu^{-1}) L_{ij}(-\lambda) L_{ij}(\lambda) F_{ik}(\mu) L_{ij}(-\lambda) = F_{jk}(-\lambda^{-1}\mu) F_{kj}(\lambda\mu^{-1}) F_{jk}(-\lambda^{-1}\mu) = L_{jk}(-\lambda^{-1}\mu)$ .

Отже:  $L_{ij}(\lambda) L_{ik}(\mu) L_{ij}(-\lambda) = L_{jk}(-\lambda^{-1}\mu)$ . (3.2)

Для доведення першої рівності достатньо домножити співвідношення (3.2) справа на  $L_{ij}(\lambda)$ . Щоб довести друге співвідношення, розглянемо рівність:  $L_{ik}(-\mu) L_{ij}(\lambda) L_{ik}(\mu) = L_{kj}(\lambda\mu^{-1})$ , яка отримана з рівності (3.2), якщо  $\lambda$  замінити на  $-\mu$ ,  $\mu$  - на  $\lambda$ , а індекси  $j$  і  $k$  поміняти місцями. Помноживши тепер рівність (3.3) зліва на  $L_{ik}(\mu)$  і скориставшись співвідношенням  $L_{kj}(\lambda\mu^{-1}) = L_{jk}(-\lambda^{-1}\mu)$ , в результаті отримаємо другу рівність твердження.

3.18. Якщо  $k \neq j$ , то  $L_{ij}(\lambda) L_{ki}(\mu) = L_{kj}(-\lambda\mu) L_{ij}(\lambda)$ ;

$$L_{ij}(\lambda) L_{ki}(\mu) = L_{ki}(\mu) L_{kj}(-\lambda\mu).$$

Доведення.

Ця рівність випливає з властивості 3.17 і співвідношень:  $L_{ki}(\mu) = L_{ik}(-\mu^{-1})$ ,  $L_{kj}(\lambda^{-1}\mu^{-1}) = L_{jk}(-\lambda\mu)$

## Ранг матриці

Нехай  $A$  - матриця розміру  $m \times n$  з коефіцієнтами з деякого поля  $F$ . Очевидно рядки матриці  $A$  - можна розглядати як вектори лінійного простору  $F^n$ . Аналогічно стовпці цієї матриці можна розглядати як вектори простору  $F^m$ . Наприклад, якщо

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

то її рядки можна розглядати як вектори  $(1, 3, 0, -2)$ ,  $(1, 0, 1, 3)$  і  $(2, 2, 1, 1)$  з простору  $R^4$ . Так само стовпці матриці  $A$  є векторами  $(1, -1, 2)$ ,  $(3, 0, 2)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(-2, 3, 1)$  з  $R^3$ . Тому будемо казати про лінійні комбінації рядків (стовпців), їхню лінійну залежність або незалежність і т.д.

### ОЗНАЧЕННЯ 4.1

Рядковим рангом матриці  $A$  називається ранг її системи векторів-рядків.

Аналогічно визначається стовпцевий ранг матриці  $A$  - це ранг її системи векторів-стовпців.

### ТЕОРЕМА 4.1

Стовпцевий (рядковий) ранг матриці  $A$  не змінюється при множенні цієї матриці зліва і справа на будь-яку матрицю  $H$  потрібного розміру, яка має обернену матрицю.

### Доведення:

Нехай  $A = (a_{ij})$  матриця розміру  $m \times n$ . Позначимо через  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$  - її вектори стовпці:  $\overline{a_j} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ . Розглянемо нульову лінійну комбінацію векторів  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ :  $\sum_{j=1}^n \gamma_j \overline{a_j} = \overline{0}$ . Будь-яка координата вектора  $\sum_{j=1}^n \gamma_j \overline{a_j}$  дорівнює нулю, тобто  $\sum_{j=1}^n \gamma_j \overline{a_j} = \overline{0}$ ,  $i=1, 2, \dots$ ,

Отримані співвідношення можна записати в матричній формі так:  $A \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ . Помножимо

тепер зліва отриману рівність на матрицю  $H$  порядку  $m$ .

$$H \begin{bmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \dots \\ \overline{a_n} \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Очевидно, } H \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Позначивши добуток  $HA$  через  $B$  і скориставшись асоціативністю добутку матриць,

$$\text{отримаємо: } (HA) \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Число стовпців в матриці  $HA=B$  дорівнює числу стовпців в матриці  $A$ , тобто дорівнює  $n$ . Позначимо через  $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_n}$  вектори-стовпці матриці  $B$ . Співвідношення (4.1) означає, що

$\sum_{j=1}^n \gamma_j \overline{b_j} = \overline{0}$ . Таким чином, якщо деяка лінійна комбінація векторів-стовпців матриці  $A$  є

нульовою,  $\sum_{j=1}^n \gamma_j \overline{a_j} = \overline{0}$ , то така ж лінійна комбінація векторів стовпців матриці  $B$  також є

нульовою,  $\sum_{j=1}^n \gamma_j \overline{b_j} = \overline{0}$ . За лемою 2.4, стовпцевий ранг матриці  $B$  не більший за стовпцевий ранг

матриці  $A$ . З іншої сторони,  $A=H^{-1}B$  і за доведеним стовпцевий ранг  $A$  не більший за стовпцевий ранг  $B$ . Отже, стовпцеві ранги матриць  $A$  і  $B$  співпадають. Отже, стовпцевий ранг не міняється при множенні матриці  $A$  зліва на матрицю, яка має обернену матрицю.

Нехай тепер  $C=AH$ , де  $H=(h_{ij})$  - матриця порядку  $m$ , яка має обернену матрицю. Тоді, якщо

$\overline{c_1}, \overline{c_2}, \dots, \overline{c_n}$  - вектори-стовпці матриці  $C$ , то  $\overline{c_i} = \sum_{j=1}^m h_{ji} \overline{a_j}$ . Таким чином система векторів-

стовпців матриці  $C$  лінійно виражається через систему векторів-стовпців матриці  $A$ . Тому, за лемою 2.2, стовпцевий ранг матриці  $C$  не перевищує стовпцевого рангу матриці  $A$ . З того, що матриця  $H$  має обернену матрицю, то  $A=CH^{-1}$ , і за доведеним стовпцевий ранг матриці  $A$  не більший за стовпцевий ранг матриці  $C$ . Отже, їх стовпцеві ранги рівні. Аналогічно доводиться рівність рядкових рангів.

## ОЗНАЧЕННЯ 4.2

Ступінчатою матрицею будемо називати таку матрицю  $A=(a_{ij})$  розміру  $m \times n$ , яка задовольняє наступним умовам:

1. Якщо  $a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{ik-1}$ , але  $a_{ik} \neq 0$ , то  $a_{ij} = 0$  для всіх  $l > i$  і  $j \leq k$ ;
2. Якщо рядок з номером  $j$  матриці  $A$  - нульовий, то всі рядки цієї матриці з номерами, більшими ніж  $j$ , також нульові.

### ПРИКЛАД 4.1

Ступінчатою буде, наприклад, матриця

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Нульову матрицю також будемо називати ступінчатою.

### ТЕОРЕМА 4.2

Рядковий ранг ступінчатої матриці дорівнює її стовпцевому рангу і дорівнює кількості ненульових рядків цієї матриці.

#### Доведення:

Нехай  $A = (a_{ij})$  - ступінчата матриця розміру  $m \times n$  і  $k$  - число ненульових рядків матриці  $A$ ,  $0 \leq k \leq m$ . Якщо  $k=0$ , то матриця  $A$  - нульова, і її рядковий і стовпцевий ранги дорівнюють нулю. В цьому випадку теорема справедлива. Припустимо, що  $k \geq 1$ . Так як лінійно незалежна система векторів не містить нульовий вектор, то рядковий ранг матриці  $A$  не перевищує  $k$ . Щоб довести, що цей ранг дорівнює  $k$ , встановимо лінійну незалежність перших  $k$  рядків матриці  $A$ . Позначимо ці рядки через  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_k}$ . Нехай  $\sum_{i=1}^k \mu_i \overline{a_i} = \overline{0}$ . Допустимо, що  $s$  такий номер, для якого  $a_{1s} \neq 0$ ,

$a_{li} = 0$  при  $i < s$ . За означенням ступінчатої матриці,  $a_{js} = 0$  для всіх  $j > 1$ . Випишемо  $s$ -ту

координату вектора  $\sum_{i=1}^k \mu_i \overline{a_i} = \overline{0}$ :  $0 = \sum_{i=1}^k \mu_i a_{is} = \mu_1 a_{1s}$ , тому, що  $a_{js} = 0$  для  $j > 1$ . З умови  $a_{1s} \neq 0$

отримаємо, що  $\mu_1 = 0$ . Нехай вже доведено, що  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{l-1} = 0$ . Встановимо, що  $\mu_l$  також дорівнює нулю. Справді, нехай  $r$  таке натуральне число, що  $a_{lr} \neq 0$ , але  $a_{li} = 0$  при  $i < r$ , тоді

$a_{ji} = 0$  для всіх  $j > r$ ,  $i \leq r$ . Тому  $r$ -та координата вектора  $\sum_{i=1}^k \mu_i \overline{a_i} = \overline{0}$  дорівнює:

$$0 = \sum_{i=1}^k \mu_i a_{ir} = \sum_{i=1}^{l-1} \mu_i a_{ir} + \mu_l a_{lr} + \sum_{i=l+1}^k \mu_i a_{ir}.$$

Перша сума в правій частині отриманого співвідношення дорівнює нулю, так як  $\mu_i = 0$  при  $i < l$ ; остання сума також дорівнює нулю, оскільки  $a_{ir} = 0$  при  $i > l$ . Тому  $\mu_l a_{lr} = 0$ , і так як  $a_{lr} \neq 0$ , то  $\mu_l = 0$ . Таким чином, допущення індукції оправдане, і

$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = 0$ . Отже, система перших  $k$  векторів-рядків лінійно незалежна і рядковий ранг матриці  $A$  дорівнює  $k$ . Для доведення того, що стовпцевий ранг матриці  $A$  теж дорівнює  $k$ , розглянемо матрицю  $B$ , яка отримується з матриці  $A$  перестановкою стовпців; при цьому стовпець матриці  $A$ , що містить перший нульовий елемент  $j$ -го рядка матриці  $A$ , стає  $j$ -им стовпцем матриці



$B$ ,  $j < k$ .; решта стовбців входять в матрицю  $B$  після стовбця з номером  $k$  в довільному порядку.

Отже, матриця  $B$  має вигляд:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & \dots & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & \dots & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{kk} & \dots & b_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

тут  $b_{ii} \neq 0$  при  $i=1, 2, \dots, k$ . Очевидно стовпцеві ранги матриць  $A$  і  $B$  рівні. Ясно, що стовпці матриці  $B$  лінійно виражаються через систему векторів  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}\}$  векторного простору  $F^n$  ( $F$  - основне поле), де  $\overline{e_j}$  - вектор з простору  $F^n$ , у якого  $i$ -та координата дорівнює 1, а інші координати дорівнюють 0. З леми 2.2 випливає, що стовпцевий ранг матриці  $B$  не перевищує  $k$ . Для доведення того, що стовпцевий ранг цієї матриці дорівнює  $k$ , встановимо лінійну незалежність її перших  $k$  стовбців. Позначимо вказані стовпці через  $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_k}$  і розглянемо нульову лінійну комбінацію цих векторів:  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \overline{b_i} = \overline{0}$ . Припустимо, ми довели, що  $\lambda_i = 0$  для

$i > s$ , де  $s \leq k$ . Запишемо  $s$ -ту координату вектора  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \overline{b_i} = \overline{0}$ :

$$0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i b_{is} = \sum_{i=1}^{s-1} \lambda_i b_{is} + \lambda_s b_{ss} + \sum_{i=s+1}^k \lambda_i b_{is}.$$

Перша сума в правій частині отриманого співвідношення дорівнює нулю, тому що  $b_{is} = 0$  при  $i < s$ ; остання сума також дорівнює нулю, оскільки  $\lambda_i = 0$  при  $i > s$ . Тому  $\lambda_s b_{ss} = 0$ , і так як  $b_{ss} \neq 0$ , то  $\lambda_s = 0$ . Таким чином, допущення індукції правильне, і  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k = 0$ . З наведених міркувань випливає, що стовпцевий ранг матриці  $B$ , а значить матриці  $A$ , дорівнює  $k$ .

Теорема доведена.

### ТЕОРЕМА 4.3

Будь-яку матрицю  $A$  за допомогою множення зліва на елементарні матриці  $F_{ij}(\lambda)$  потрібного розміру можна привести до ступінчатого виду.

Доведення:

Будемо доводити теорему індукцією по числу рядків матриці  $A$ . Будь-яка матриця, що складається з одного рядка, є ступінчатою і в цьому випадку теорема доведена.

Нехай теорема справедлива для матриці, що має  $m$  рядків. Розглянемо матрицю  $A$ , яка складається з  $m+1$  рядка. Якщо матриця  $A$  - нульова, то вона є ступінчатою і для неї теорема справедлива. Нехай тепер  $A$  - ненульова матриця,  $A=(a_{ij})$ . Розглянемо спочатку випадок коли  $a_{11} \neq 0$ . Позначимо через  $B$  матрицю  $F_{21}(-a_{11}^{-1}a_{21}) F_{31}(-a_{11}^{-1}a_{31}) \dots F_{m+1,1}(-a_{11}^{-1}a_{m+1,1}) A$ . Незавжди переконатися, що

$$B = \left[ \begin{array}{c|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & & & \\ 0 & & A_1 & & \\ \dots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right].$$

Матриця  $A_1$  має  $m$  рядків і за припущенням індукції існують елементарні матриці  $U_1, U_2, \dots, U_r$ , порядку  $m$  такі, що  $U_1, U_2, \dots, U_r, A_1 = B_1$ , де  $B_1$  - ступінчата матриця. Очевидно, матриці

$$V_i = \left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & U_i & & \\ \dots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right], i=1, 2, \dots, r$$

також є елементарними порядку  $m+1$ . Крім того, матриця

$$A_2 = V_1 V_2 \dots V_r B = \left[ \begin{array}{c|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & & & \\ 0 & & B_1 & & \\ \dots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right].$$

Так як  $B_1$  - ступінчата матриця, то  $A_2$  також ступінчата. Матриця  $A_2$  отримана з матриці  $B$  множенням зліва на елементарні матриці. Матриця  $B$  аналогічним чином отримана з матриці  $A$ . Тому матриця  $A_2$  може бути отримана з матриці  $A$  множенням зліва на елементарні матриці. У випадку коли  $a_{11} \neq 0$  допущення індукції оправдане. Нехай тепер  $a_{11} = 0$ , але  $a_{i1} \neq 0$  для деякого  $i > 1, i \leq m$ . Тоді в матриці  $B = F_{i1}(1)A$  елемент, що стоїть у правому верхньому кутку, не дорівнює нулю. За доведеним матриця  $B$ , а значить і матриця  $A$ , приводиться до ступінчатого виду множенням зліва на елементарні матриці. Залишилося розглянути випадок, коли перший стовпець матриці  $A$  - нульовий. Нехай  $s$  - таке натуральне число, що будь-який стовпець матриці  $A$  з номером  $i < s$  є нульовим, а  $s$ -тий стовпець цієї матриці - ненульовий. Позначимо через  $A$  матрицю, отриману з матриці  $A$  видаленням перших  $(s-1)$ -го стовпців. За доведеним, існують такі

елементарні матриці  $W_1, W_2, \dots, W_t$ , що матриця  $W_1, W_2, \dots, W_t A_1$  є ступінчатою. Легко перевірити, що матриця  $W_1, W_2, \dots, W_t A$  також є ступінчатою. У будь-якому випадку припущення індукції оправдане.

Теорема доведена.

#### Наслідок 4.1

Рядковий і стовпцевий ранги довільної матриці рівні між собою.

Твердження наслідку випливає з теорем 4.1, 4.2 і 4.3.

#### ОЗНАЧЕННЯ 4.3

Рангом матриці  $A$  називається її рядковий (стовпцевий) ранг.

#### ТЕОРЕМА 4.4

Якщо  $A$  – ступінчата квадратна матриця, то існують такі елементарні матриці  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , що добуток  $A V_1 V_2 \dots V_k$  є діагональною матрицею.

Доведення:

Нехай  $A = (a_{ij})$  – ступінчата матриця порядку  $n$ . Припустимо спочатку, що  $a_{11} \neq 0$ . Тоді в матриці  $B = A F_{12}(-\alpha_{12} \alpha_{11}^{-1}) F_{13}(-\alpha_{13} \alpha_{11}^{-1}) \dots F_{1n}(-\alpha_{1n} \alpha_{11}^{-1})$  всі елементи першого рядка, за виключенням елемента, що знаходиться на головній діагоналі, рівні нулю:

$$B = \left[ \begin{array}{c|cccc} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & C & & \\ \dots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right].$$

Можна припустити за індукцією, що існують такі елементарні матриці  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , що  $B V_1 V_2 \dots V_n$  є діагональною матрицею. Нехай

$$V_i^* = \left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & V_i & & \\ \dots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right], i=1, 2, \dots, n.$$

Тоді  $B V_1^* V_2^* \dots V_n^*$  – діагональна матриця. Отже,  $A F_{12}(-\alpha_{12} \alpha_{11}^{-1}) F_{13}(-\alpha_{13} \alpha_{11}^{-1}) \dots F_{1n}(-\alpha_{1n} \alpha_{11}^{-1}) \times$   
 $\times V_1^* V_2^* \dots V_n^*$  – діагональна матриця, і в цьому випадку теорема доведена. Припустимо тепер, що

$a_{11} = 0$ . Якщо всі елементи першого рядка матриці  $A$  дорівнюють нулю, то в цьому випадку теорема доводиться як і в попередньому випадку. Нехай  $a_{1i}$  - перший не рівний нулю елемент першого рядка матриці  $A$ . Тоді матриця  $B = A F_{i1}(1) F_{1i}(-1) F_{i1}(1)$  є ступінчатою, причому в матриці  $B$  елемент, що стоїть на перетині 1-ого рядка і 1-го стовпця, дорівнює  $a_{1i} \neq 0$ . Отримали випадок який був розглянутий раніше.

Теорема доведена.

ТЕОРЕМА 4.5

Ранг добутку матриць не перебільшує ранга кожного з її співмножників.

Доведення:

Достатньо довести теорему для двох її співмножників. Нехай  $C=AB$ , де  $A=(a_{ij})$  - матриця розміру  $k \times m$ ,  $B=(b_{ij})$  - матриця розміру  $m \times n$ , і  $C=(c_{ij})$  - матриця розміру  $k \times n$ . За означенням добутку матриць,  $c_{ij} = \sum_{s=1}^m a_{is} b_{sj}$ . Якщо зафіксувати індекс  $i$ , але змінювати індекс  $j$ , то скаляри  $c_{ij}$  будуть координатами вектора-рядка матриці  $C$  з номером,  $i$ . Звідси випливає, що  $i$ -тий рядок  $\bar{c}_i$  матриці  $C$  є лінійною комбінацією рядків матриці  $B$ ,  $\bar{c}_i = \sum_{s=1}^m a_{is} \bar{b}_s$   $i=1, 2, \dots, k$ . В силу наслідку 2.3, ранг матриці  $C$  не перебільшує рангу матриці  $B$ . Так само можна довести, що стовпці матриці  $C$  лінійно виражаються через стовпці матриці  $A$ , і, значить, ранг матриці  $C$  не перебільшує ранг матриці  $A$ .

Теорема доведена.

## Визначники

В даному розділі викладений новий підхід до теорії визначників.

Встановимо деякі факти, необхідні для подальшого викладу. Для цього введемо ряд позначень. Через  $X$  позначимо множину всіх елементарних матриць виду  $F_{ij}(\lambda)$ , де  $\lambda \in R$ ,  $i < j$ ;  
 $X = \{F_{ij}(\lambda) / i < j\}$ . Далі покладемо:

$$Y = \{F_{ij}(\lambda) / i > j, \lambda \in R\};$$

$$\overline{X} = \{E, V_1 V_2 \dots V_r / r \in N, V_i \in X, i = 1, 2, \dots, r\};$$

$$\overline{Y} = \{E, V_1 V_2 \dots V_s / s \in N, V_j \in Y, j = 1, 2, \dots, s\};$$

$$l = \{L_{ij}(\alpha) / \alpha \in R, i \neq j\};$$

$$\overline{l} = \{E, W_1 W_2 \dots W_t / t \in N, W_j \in l, j = 1, 2, \dots, t\};$$

$$x_q = \{F_{iq}(\lambda) / q > i, q \in N, q\text{-фіксоване число}\};$$

ЛЕМА 1.

Якщо  $U \in X_q$ ,  $V \in X_q$ , то  $U \cdot V = V \cdot U$ .

Доведення.

Нехай  $U = F_{iq}(\alpha)$ ,  $V = F_{jq}(\beta)$ . Припустимо спочатку, що  $i \neq j$ . Оскільки  $i < q$ ,  $j < q$ , то в силу 3.6,  $F_{iq}(\alpha) \cdot F_{jq}(\beta) = F_{jq}(\beta) \cdot F_{iq}(\alpha)$ . Якщо ж  $i = j$ , то згідно 3.1,  $F_{jq}(\alpha) \cdot F_{jq}(\beta) = F_{jq}(\alpha + \beta) = F_{jq}(\beta) \cdot F_{jq}(\alpha)$ . В будь-якому випадку лема доведена.

З означення елементарних матриць випливає, що  $F_{ij}(0) = E + 0 \cdot E_{ij} = E$ .

Нехай  $T$  – підмножина множини  $X$ . Покладемо  $CT = X \cdot T$  і  $\overline{CT} = \{V_1 V_2 \dots V_m / V_i \in CT, i = 1, 2, \dots, m\}$ . Позначимо далі через  $M_{ij}$  множину всіх елементарних матриць виду  $F_{ij}(\lambda)$  з фіксованими  $i, j$ , коли  $\lambda$  приймає всі значення з основного поля  $R$ ,  $M_{ij} \subset X$ . Нехай тепер  $r$  і  $q$  – цілі числа,  $1 < q \leq n$ ,  $0 \leq r < q$ . Нехай  $T_r = \bigcup_{r < i < q} M_{iq}$ . Якщо  $F_{ij}(\lambda) \in CT_r$ ,  $i < j$ , то або  $j \neq q$ , або  $j = q$  але  $i \leq r$ .

ЛЕМА 2.

Якщо  $A \in \overline{CT}_{r-1}$ ,  $r < q$  то  $A \cdot F_{rq}(\alpha) = F_{rq}(\alpha) \cdot B$ , де  $B \in \overline{CT}_{r-1}$ .

Доведення.

Припустимо спочатку, що  $A = F_{jk}(\beta)$ ,  $A \in CT_{r-1}$ , тобто  $A$  містить тільки один співмножник з  $CT_{r-1}$ . Якщо  $k \neq r$ ,  $j \neq q$ , то в силу 3.6,  $A \cdot F_{rq}(\alpha) = F_{jk}(\beta) F_{rq}(\alpha) = F_{rq}(\alpha) F_{jk}(\beta) = F_{rq}(\alpha) B$ , де  $B = F_{jk}(\beta) \in \overline{CT}_{r-1}$ . Якщо  $j = q$ , то згідно 3.4,  $A \cdot F_{rq}(\alpha) = F_{qk}(\beta) F_{rq}(\alpha) = F_{rq}(\alpha) F_{qk}(\beta) \cdot F_{rk}(-\alpha\beta) = F_{rq}(\alpha) B$ , де  $B = F_{qk}(\beta) \cdot F_{rk}(-\alpha\beta) \in \overline{CT}_{r-1}$ , оскільки  $k > q$ .

Нехай, нарешті,  $k = r$ . Тоді в силу 3.3,  $A \cdot F_{rq}(\alpha) = F_{jr}(\beta) F_{rq}(\alpha) = F_{rq}(\alpha) F_{jr}(\beta) \cdot F_{jq}(\alpha \cdot \beta) = F_{rq}(\alpha) B$ , де  $B = F_{jr}(\beta) \cdot F_{jq}(\alpha\beta) \in \overline{CT}_{r-1}$ , оскільки  $j < r$ .

Таким чином, якщо  $A$  є елементарною матрицею, то твердження леми справедливе. Припустимо за індукцією, що лема доведена для випадку, коли  $A$  є добутком  $m$  співмножників з  $CT_{r-1}$ ,  $m \geq 1$ . Нехай  $A = V_1 \cdot V_2 \cdot \dots \cdot V_m \cdot V_{m+1}$ ,  $V_i \in CT_{r-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m, m+1$ . За припущенням індукції,  $(V_2 \cdot \dots \cdot V_m \cdot V_{m+1}) F_{rq}(\alpha) = F_{rq}(\alpha) B_1$ , де  $B_1 \in \overline{CT}_{r-1}$ . Крім того, за доведеним  $V_1 \cdot F_{rq}(\alpha) = F_{rq}(\alpha) B_2$ , де  $B_2 \in \overline{CT}_{r-1}$ . Звідси випливає, що

$A \cdot F_{rq}(\alpha) = V_1(V_2 \cdot \dots \cdot V_m \cdot V_{m+1})F_{rq}(\alpha) = V_1 \cdot F_{rq}(\alpha) \cdot B_1 = F_{rq}(\alpha) \cdot B_2 \cdot B_1 = F_{rq}(\alpha)B$ , де  $B = B_1B_2 \in \overline{CT}_{r-1}$ . Допущення індукції оправдане. Лема доведена.

ЛЕМА 3.

Якщо  $A \in \overline{CT}_{r-1}$ ,  $r < q$  то  $A = F_{rq}(\lambda)B$ , де  $B \in \overline{CT}_{r-1}$ .

Доведення.

Лема очевидна, якщо  $A \in CT_{r-1}$ , або  $A = F_{rq}(\lambda)$ . Припустимо, що  $A = A_1F_{rq}(\alpha)A_2$ , де  $A_1, A_2 \in \overline{CT}_{r-1}$ , тобто  $A$  містить один співмножник, що належить  $M_{rq} \subset T_{r-1}$ . За лемою 2,  $A_1F_{rq}(\alpha) = F_{rq}(\alpha) \cdot B_1$ , де  $B_1 \in \overline{CT}_{r-1}$ . Тому  $A = A_1F_{rq}(\alpha) \cdot A_2 = F_{rq}(\alpha) \cdot B_1 \cdot A_2 = F_{rq}(\alpha) \cdot B$ , де  $B = B_1 \cdot A_2 \in \overline{CT}_{r-1}$ .

Таким чином, якщо в  $A$  є тільки один співмножник з  $M_{rq}$ , то твердження даної леми виконується. Припустимо, що лема доведена для випадку, коли  $A$  містить  $m$  співмножників, що належать множині  $M_{rq}$ ,  $m \geq 1$ . Нехай тепер  $A$  містить  $m+1$  співмножників з  $M_{rq}$ . Тоді вираз  $A$  можна представити у вигляді:  $A = A_1F_{rq}(\alpha) \cdot A_2$ , де  $A_1 \in \overline{CT}_{r-1}$ ,  $A_2 \in \overline{CT}_{r-1}$ , причому  $A_2$  містить  $m$  співмножників з множини  $M_{rq}$ . За лемою 2,  $A_1F_{rq}(\alpha) = F_{rq}(\alpha) \cdot B_1$ , де  $B_1 \in \overline{CT}_{r-1}$ . Тому  $A = F_{rq}(\alpha)B_1A_2 = F_{rq}(\alpha)B_2$ , де  $B_2 = B_1 \cdot A_2 \in \overline{CT}_r$ , причому  $B_2$  містить  $m$  співмножників, що належать  $M_{rq}$ . За припущенням індукції,  $B_2 = F_{rq}(\mu) \cdot B$ , де  $B \in \overline{CT}_{r-1}$ . Отже,  $A = F_{rq}(\alpha)F_{rq}(\mu)B = F_{rq}(\alpha + \mu)B = F_{rq}(\lambda)B$ , де  $\lambda = \alpha + \mu$ ,  $B \in \overline{CT}_{r-1}$ . Припущення індукції виправдане.

Лема доведена.

ЛЕМА 4.

Якщо  $A \in \overline{X}$ , то  $A$  можна представити у вигляді  $A = \prod_{i=1}^{q-1} F_{iq}(\alpha_i)B$ , де  $B \in \overline{CX}_q$ .

Доведення.

Як було раніше відмічено,  $X = CT_{q-1}$ . Тому в силу леми 3,  $A = F_{q-1,q}(\alpha_{q-1})B_1$ , де  $B_1 \in \overline{CT}_{q-2}$ . Припустимо за індукцією, що для деякого  $m$ ,  $1 \leq m < q-1$ ,  $A = F_{q-1,q}(\alpha_{q-1})F_{q-2,q}(\alpha_{q-2}) \dots F_{q-m,q}(\alpha_{q-m})B_m$  де  $B_m \in \overline{CT}_{q-m-1}$ . Тоді за лемою 3,  $B_m = F_{q-m-1,q}(\alpha_{q-m-1})B_{m+1}$ , де  $B_{m+1} \in \overline{CT}_{q-m-2}$ . Тому  $A = F_{q-1,q}(\alpha_{q-1})F_{q-2,q}(\alpha_{q-2}) \dots F_{q-m,q}(\alpha_{q-m})F_{q-m-1,q}(\alpha_{q-m-1})B_{m+1}$ . Припущення індукції виправдане. При  $m = q-1$  отримаємо, що  $A = F_{q-1,q}(\alpha_{q-1}) \dots F_{2,q}(\alpha_2)F_{1,q}(\alpha_1)B_{q-1}$ , де  $B_{q-1} \in \overline{CT}_0 = \overline{CX}_q$ . За лемою 1,  $F_{q-1,q}(\alpha_{q-1}) \dots F_{2,q}(\alpha_2)F_{1,q}(\alpha_1) = \prod_{i=1}^{q-1} F_{iq}(\alpha_i)$ . Отже,

$$A = \prod_{i=1}^{q-1} F_{iq}(\alpha_i)B, \text{ де } B = B_{q-1} \in \overline{CX}_q.$$

Лема доведена.

Лема 5.

Якщо  $r < q-1$ ,  $A \in \overline{CT}_r$ , то  $F_{q,q-1}(\alpha)A = BF_{q,q-1}(\alpha)$ , де  $B \in \overline{CT}_r$ .

Доведення.

Припустимо, що  $A \in CT_r$ , тобто  $A$  є елементарною матрицею. Якщо  $A = F_{sq}(\beta)$ , то  $s < r+1$ , оскільки  $A \in CT_r$ . Тому в силу 3.4,

$F_{q,q-1}(\alpha)F_{sq}(\beta) = F_{sq}(\beta)F_{s,q-1}(-\alpha\beta)F_{q,q-1}(\alpha) = B_1 F_{q,q-1}(\alpha)$ , де  $B_1 = F_{sq}(\beta)F_{s,q-1}(-\alpha\beta) \in \overline{CT}_r$ , оскільки  $s \leq r < q-1$ .

Якщо  $A = F_{q-1,p}(\gamma)$ , то  $p > q-1$ , і значить,  $p > q$ , оскільки в іншому випадку  $A \in T_{q-r} \subseteq T_r$ . Тому  $F_{q,q-1}(\alpha)A = F_{q,q-1}(\alpha)F_{q-1,p}(\gamma) = F_{q-1,p}(\gamma)F_{qp}(\alpha\gamma)F_{q,q-1}(\alpha) = B_2 F_{q,q-1}(\alpha)$ , де  $B_2 = F_{q-1,p}(\gamma)F_{qp}(\alpha\gamma) \in \overline{CT}_r$ , оскільки  $p > q$ .

Нарешті, якщо  $A = F_{st}(\mu) \in CT_r$ , причому  $s \neq q-1$ ,  $t \neq q$ , то згідно 3.6,  $F_{q,q-1}(\alpha)F_{st}(\mu) = F_{st}(\mu)F_{q,q-1}(\alpha) = B_3 F_{q,q-1}(\alpha)$ , де  $B_3 = F_{st}(\mu) \in \overline{CT}_r$ .

В будь-якому з розглянутих трьох випадків  $F_{q,q-1}(\alpha)A = B_4 F_{q,q-1}(\alpha)$ , (\*) де  $B_4 \in \overline{CT}_r$ .

Використовуючи співвідношення (\*), доведемо лему індукцією по числу  $m$  співмножників, які входять у вираз  $A$ . Якщо  $m=1$ , тобто  $A \in CT_r$ , то твердження леми безпосередньо випливає з співвідношення (\*). Припустимо, що лема справедлива для деякого  $m \geq 1$ , нехай  $A = V_1 V_2 \dots V_m V_{m+1}$ ,  $V_k \in CT_r$ ,  $k = 1, 2, \dots, m+1$ . Тоді в силу співвідношення (\*),  $F_{q,q-1}(\alpha)A = F_{q,q-1}(\alpha)V_1(V_2 \dots V_m V_{m+1}) = B_4 F_{q,q-1}(\alpha)V_2 \dots V_m V_{m+1}$ , де  $B_4 \in \overline{CT}_r$ . За припущенням індукції  $F_{q,q-1}(\alpha)V_2 \dots V_m V_{m+1} = B_5 F_{q,q-1}(\alpha)$ , де  $B_5 \in \overline{CT}_r$ . Отже,  $F_{q,q-1}(\alpha)A = B_4 B_5 F_{q,q-1}(\alpha) = B F_{q,q-1}(\alpha)$ , де  $B = B_4 B_5 \in \overline{CT}_r$ . Припущення індукції виправдане. Лема доведена.

#### Лема 6.

Нехай  $r$  і  $i$  – цілі числа,  $r < q-1$ ,  $r < i < q-1$ . Якщо  $A \in \overline{CT}_r$ , то  $F_{q,qi}(\alpha)A = BH$ , де  $B \in \overline{CT}_r$ ,  $H \in \bar{Y}$ .

#### Доведення.

У випадку, коли  $q-i=1$ , дана лема є наслідком леми 5. Припустимо за індукцією, що твердження даної леми справедливе, якщо  $q-i=m \geq 1$ . Нехай тепер  $q-i=m+1$ . Доведемо тепер, що  $F_{q,i}(\alpha)A = BH$ , де  $B \in \overline{CT}_r$ ,  $H \in \bar{Y}$ . Розглянемо спочатку випадок, коли  $A \in CT_r$ , тобто  $A$  є елементарною матрицею. Припустимо, що  $A = F_{vu}(\gamma)$ , де  $v \neq i$ ,  $u \neq q$ . Тоді  $F_{qi}(\alpha)A = F_{qi}(\alpha_1)F_{vu}(\gamma) = F_{vu}(\gamma)F_{q,i}(\alpha)$ , в силу 3.6; отже  $F_{qi}(\alpha)A = B_1 H_1$ , де  $B_1 = F_{vu}(\gamma) \in \overline{CT}_r$ ,  $H_1 = F_{q,i}(\alpha) \in \bar{Y}$ .

Нехай тепер  $A = F_{jq}(\lambda)$ ; тоді  $j \leq r$ , оскільки  $A \in CT_r$ . Тому  $F_{qi}(\alpha)A = F_{q,i}(\alpha)F_{jq}(\lambda) = F_{jq}(\lambda)F_{ji}(-\alpha\lambda)F_{q,i}(\alpha) = B_2 H_2$ , де  $B_2 = F_{jq}(\lambda)F_{ji}(-\alpha\lambda) \in \overline{CT}_r$ , оскільки  $j \leq r$ ,  $j \leq r < i$ ,  $H_2 = F_{q,i}(\alpha) \in \bar{Y}$ .

Нехай  $A = F_{ip}(\mu)$ ,  $p > q$ . В цьому випадку  $F_{q,i}(\alpha)F_{ip}(\mu) = F_{ip}(\mu)F_{qp}(\alpha\mu)F_{q,i}(\alpha) = B_3 H_3$ , де  $B_3 = F_{ip}(\mu)F_{qp}(\alpha\mu) \in \overline{CT}_r$ , оскільки  $p > q$ ,  $H_3 = F_{q,i}(\alpha) \in \bar{Y}$ .

Припустимо, нарешті, що  $A = F_{ip}(\mu)$ ,  $p < q$ . Тоді  $F_{q,i}(\alpha)F_{ip}(\mu) = F_{ip}(\mu)F_{q,i}(\alpha)F_{qp}(\alpha\mu) = B_4 H_4$ , де  $B_4 = F_{ip}(\mu) \in \overline{CT}_r$ ,  $H_4 = F_{q,i}(\alpha)F_{qp}(\alpha\mu) \in \bar{Y}$ , причому  $p > i$ , а значить  $q-p < q-i \leq m$ .

Випадок  $A = F_{ip}(\mu)$ ,  $p = q$  неможливий, оскільки  $F_{iq}(\mu) \in T_r$ , ( $i > r$ ).

В перших трьох випадках з розглянутих 4-х виконується співвідношення

$$F_{qi}(\alpha)A = B_5 F_{q,i}(\alpha), \text{ де } B_5 \in \overline{CT}_r. \quad (**)$$

В четвертому випадку  $F_{qi}(\alpha)A = B_6 F_{qp}(\alpha\mu) F_{qi}(\alpha)$ , де  $B_6 \in \overline{CT}_r$ . (\*\*\*)

З співвідношень (\*\*) і (\*\*\*) випливає, що, якщо  $A \in \overline{CT}_r$ , тобто  $A$  містить один співмножник, що належить  $\overline{CT}_r$ , то  $F_{qi}(\alpha)A = B_7 H_7$ , де  $B_7 \in \overline{CT}_r$ ,  $H_7 \in \bar{Y}$ . Припустимо, що вказане співвідношення виконується, якщо  $A$  містить  $k$  співмножників, що належать  $\overline{CT}_r$ ,  $k \geq 1$  (проміжкові припущення індукції). Нехай тепер  $A = V_1 V_2 \dots V_{k+1}$ ,  $V_j \in \overline{CT}_r$ ,  $j = 1, 2, \dots, k+1$ . У випадку, коли при  $p < q$   $V_1 \neq F_{ip}(\mu)$ , то згідно (\*\*)  $F_{qi}(\alpha) V_1 = B_5 F_{qi}(\alpha)$ . За проміжковим припущенням індукції  $F_{qi}(\alpha) \cdot V_2 \dots V_{k+1} = B_8 \cdot H_8$ , де  $B_8 \in \overline{CT}_2$ ,  $H_8 \in \bar{Y}$ .

Звідси випливає  $F_{qi}(\alpha) \cdot A = B_5 \cdot F_{qi}(\alpha) \cdot V_2 \cdot V_3 \dots V_{k+1} = B_5 \cdot B_8 \cdot H_8 = B_9 \cdot H_8$ , де  $B_9 = B_5 \cdot B_8 \in \overline{CT}_2$ ,  $H_8 \in \bar{Y}$ .

В цьому випадку проміжне припущення індукції виправдано.

Якщо  $V_1 = F_{ip}(\mu)$ ,  $p < q$ , то  $F_{qi}(\alpha) \cdot V_1 = B_6 F_{qp}(\alpha\mu) F_{qi}(\alpha)$ , де  $B_6 = V_1 \in \overline{CT}_r$ . Знов, в силу проміжного припущення індукції,  $F_{qi}(\alpha) \cdot V_2 \dots V_{k+1} = B_8 \cdot H_8$ , де  $B_8 \in \overline{CT}_r$ ,  $H_8 \in \bar{Y}$ . Тому  $F_{qi}(\alpha) \cdot A = B_6 \cdot F_{qp}(\alpha\mu) \cdot F_{qi}(\alpha) \cdot V_2 \dots V_{k+1} = B_6 \cdot F_{qp}(\alpha\mu) \cdot B_8 \cdot H_8$ . Оскільки  $q - p \leq m$ , то за основним припущенням індукції  $F_{qp}(\alpha\mu) \cdot B_8 = B_{10} \cdot H_9$ , де  $B_{10} \in \overline{CT}_r$ ,  $H_9 \in \bar{Y}$ . Остаточного отримуємо:  $F_{qi}(\alpha) \cdot A = B_6 \cdot B_{10} \cdot H_9 \cdot H_8 = B \cdot H$ , де  $B = B_6 \cdot B_{10} \in \overline{CT}_r$ ,  $H = H_9 \cdot H_8 \in \bar{Y}$ .

Проміжне припущення індукції в усіх випадках виправдано, а разом з тим виправдано і основне припущення індукції. Лема доведена.

Позначимо за  $\vartheta$  множину  $\vartheta = \{D \mid D = \sum_{k=1}^n \gamma_k E_{kk}, \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n = 1\}$

Лема 7.

Якщо  $A \in \bar{X}$ , то  $F_{qq-1}(\alpha) \cdot A = D \cdot W \cdot B \cdot H$ , де  $D \in \vartheta$ ,  $W \in \bar{l}$ ,  $B \in \bar{X}$ ,  $H \in \bar{Y}$ .

Доведення.

За лемою 4  $A = \prod_{i=q-1}^1 F_{iq}(\beta_i) \cdot G$ , де  $G \in \overline{CX}_q$ . Якщо  $\beta_{q-1} = 0$ , то  $F_{q-1q}(\beta_{q-1}) = E$ , та

$A \in \overline{CT}_{q-2}$ . В цьому випадку лема, що доводиться є наслідком лема 5:

$F_{qq-1}(\alpha) \cdot A = D \cdot W \cdot B \cdot H$ , де  $D = E \in \vartheta$ ,  $W = E \in \bar{l}$ ,  $B \in \overline{CT}_{q-2} \subset \bar{X}$ ,  $H = F_{qq-1}(\alpha) \in \bar{Y}$ .

Нехай тепер  $\beta_{q-1} \neq 0$ ; якщо  $\beta_{q-1} \neq -\alpha^{-1}$ , то в силу 3.7

$F_{qq-1}(\alpha) \cdot F_{q-1q}(\beta_{q-1}) = D \cdot F_{q-1q}(\lambda) \cdot F_{qq-1}(\mu)$ , де  $D \in \vartheta$ ,  $\lambda = \beta_{q-1}(1 + \alpha\beta_{q-1})$ ,  $\mu = \alpha(1 + \beta_{q-1}\alpha)^{-1}$ .

З отриманого співвідношення та лема 5 слідує, що

$F_{qq-1}(\alpha) \cdot A = D \cdot F_{q-1q}(\lambda) \cdot F_{qq-1}(\mu) \cdot \prod_{i=q-2}^1 F_{iq}(\beta_i) \cdot G = D \cdot F_{q-1q}(\lambda) \cdot B_1 \cdot H$ , де

$B_1 \in \bar{X}$ ,  $H = F_{qq-1}(\mu) \in \bar{Y}$ , оскільки  $\prod_{i=q-2}^1 F_{iq}(\beta_i) \cdot G \in \overline{CT}_{q-2}$ .

Звідси випливає  $F_{qq-1}(\alpha) \cdot A = D \cdot B \cdot W \cdot H$ , де

$D \in \vartheta$ ,  $W = E \in \bar{l}$ ,  $B = F_{q-1q}(\lambda) \cdot B_1 \in \bar{X}$ ,  $H \in \bar{Y}$ .

В цьому випадку лема доведена.



Нехай, нарешті  $\beta_{q-1} = -\alpha^{-1}$ . Тоді згідно 3.12  $F_{qq-1}(\alpha) \cdot F_{q-1q}(\beta_{q-1}) = L_{q-1q}(\alpha) \cdot F_{qq-1}(-\alpha)$ .

Тому  $F_{qq-1}(\alpha) \cdot A = L_{q-1q}(\alpha) F_{qq-1}(-\alpha) \cdot \prod_{i=q-2}^1 F_{iq}(\beta_i) \cdot G = L_{q-1q}(\alpha) \cdot B \cdot H$ , де

$$B \in \overline{CT}_{q-2} \subset \bar{X}, H = F_{qq-1}(-\alpha) \in \bar{Y}$$

Таким чином, у випадку, що розглядається  $F_{qq-1}(\alpha) \cdot A = D \cdot B \cdot W \cdot H$ , де  $D = E \in \vartheta, W = L_{q-1,q} \in \bar{l}, B \in \bar{X}, H = F_{q,q-1}(-\alpha) \in \bar{Y}$ .

Лема повністю доведена.

Лема 8.

Якщо  $A \in \bar{X}, q > i$ , то  $F_{qi}(\alpha) \cdot A = D \cdot W \cdot B \cdot H$ , де  $D \in \vartheta, W \in \bar{l}, B \in \bar{X}, H \in \bar{Y}$ .

Доведення.

Якщо  $q - i = 1$ , тобто  $i = q - 1$ , то лема, що доводиться є наслідком лем 7. Припустимо по індукції, що лема справедлива для всіх  $i$ , для яких  $q - i \leq m$ . Нехай  $q - i = m + 1$ . В силу лем

4,  $A$  можна представити у вигляді:  $A = \prod_{j=q-1}^1 F_{jq}(\beta_j) \cdot G$ , де  $G \in \overline{CX}_q$ .

Якщо  $\beta_{q-1} = \beta_{q-2} = \dots = \beta_{q-i} = 0$ , то  $A \in \overline{CT}_{q-i-1}$ , і, за лемою 6,  $F_{qi}(\alpha) \cdot A = D \cdot W \cdot B \cdot H$ , де  $D = E \in \vartheta, W = E \in \bar{l}, B \in \bar{X}, H \in \bar{Y}$ .

Якщо  $\beta_{q-1} = \beta_{q-2} = \dots = \beta_{q-i+1} = 0$ , але  $\beta_{q-i} \neq 0$ , то твердження лем можна довести дословним повторенням міркувань лем 7 для випадку, коли  $\beta_{q-1} \neq 0$ .

Нехай, нарешті  $s$  - найбільший номер, для якого  $\beta_s \neq 0, s > i$ .

Тоді, згідно 3.11

$$F_{sq}(\beta_s) = F_{sq}(\beta_s) \cdot F_{qs}(-\beta_s^{-1}) \cdot F_{sq}(\beta_s) \cdot F_{sq}(-\beta_s) \cdot F_{qs}(\beta_s^{-1}) = L_{sq}(\beta_s) \cdot F_{sq}(-\beta_s) F_{qs}(-\beta_s^{-1}).$$

Оскільки  $\prod_{j=s-1}^1 F_{jq}(\beta_j) \cdot G \in \overline{CT}_{s-1}$ , то за лемою 6

$$F_{qi}(\alpha) \cdot A = F_{qi}(\alpha) \cdot F_{sq}(\beta_s) \cdot \prod_{j=s-1}^1 F_{jq}(\beta_j) \cdot G = F_{qi}(\alpha) \cdot L_{sq}(\beta_s) \cdot F_{sq}(-\beta_s) F_{qs}(\beta_s^{-1})$$

$$\cdot \prod_{j=s-1}^1 F_{jq}(\beta_j) \cdot G = F_{qi}(\alpha) \cdot L_{sq}(\beta_s) \cdot F_{sq}(-\beta_s) \cdot B_2 \cdot H_2, \text{ де } B_2 \in \bar{X}, H_2 \in \bar{Y}. \text{ Оскільки } s < q, \text{ то}$$

$$F_{sq}(-\beta_s) \in X, \text{ а звідси } F_{qi}(\alpha) \cdot A = F_{qi}(\alpha) \cdot L_{sq}(\beta_s) \cdot B_3 \cdot H_2, \text{ де}$$

$$B_3 = F_{sq}(-\beta_s) \cdot B_2 \in \bar{X}, H_2 \in \bar{Y}.$$

Крім того в силу 3.13 ,

$$F_{qi}(\alpha) L_{sq}(\beta_s) = L_{sq}(\beta_s) \cdot L_{sq}(-\beta_s) F_{qi}(\alpha) L_{sq}(\beta_s) = L_{sq}(\beta_s) \cdot F_{si}(\beta_s^{-1} \alpha),$$

причому  $i < s \leq q - 1 < q$ . Тому  $s - i < q - i \leq m$ , і за припущенням індукції,

$$F_{si}(\beta_s^{-1} \alpha) \cdot B_3 = B_4 \cdot H_3, \text{ де } B_4 \in \bar{X}, H_3 \in \bar{Y}.$$

Звідси випливає, що

$$F_{qi}(\alpha) \cdot A = F_{qi}(\alpha) \cdot L_{sq}(\beta_s) \cdot B_3 \cdot H_2 = L_{sq}(\beta_s) \cdot F_{si}(\beta_s^{-1} \alpha) \cdot B_3 \cdot H_2 = L_{sq}(\beta_s) \cdot B_4 \cdot H_3 \cdot H_2 =$$

$$= L_{sq}(\beta_s) \cdot B_4 \cdot H_4, \text{ де } B_4 \in \bar{X}, H_4 = H_3 \cdot H_2 \in \bar{Y}. \text{ Таким чином, у випадку, що розглядається}$$

$$F_{qi}(\alpha) \cdot A = D \cdot W \cdot B \cdot H, \text{ де } D = E \in \vartheta, W = L_{sq}(\beta_s) \in \bar{l}, B = B_4 \in \bar{X}, H = H_4 \in \bar{Y}.$$

Лема доведена.

Теорема.

Будь-який добуток елементарних матриць можна представити у вигляді  $D \cdot W \cdot A \cdot B$ , де  $D \in \vartheta$ ,  $W \in \bar{l}$ ,  $A \in \bar{X}$ ,  $B \in \bar{Y}$ .

Доведення.

Якщо добуток елементарних матриць містить один співмножник, то ствердження теореми справедливе, оскільки цей добуток можна представити у вигляді  $D \cdot W \cdot A \cdot B$ , де  $D = E \in \vartheta$ ,  $W = E \in \bar{l}$ ,  $A = E$ ,  $B \in \bar{Y}$ , або  $A \in X$ ,  $B = E$ . Припустимо, що твердження теореми виконується для добутку  $m$  співмножників,  $m \geq 1$ . Розглянемо добуток  $V_1 V_2 \dots V_m V_{m+1}$ , де  $V_i$  -елементарна матриця,  $i = 1, 2, \dots, m+1$ . За припущенням індукції  $V_2 \dots V_m V_{m+1} = D_1 W_1 A_1 B_1$ , де  $D_1 \in \vartheta$ ,  $W_1 \in \bar{l}$ ,  $A_1 \in \bar{X}$ ,  $B_1 \in \bar{Y}$ . Тому  $V_1 V_2 \dots V_m V_{m+1} = V_1 D_1 W_1 A_1 B_1$ . В силу 3.8,  $D_1^{-1} V_1 D_1 = Q_1$ , де  $Q_1$  - елементарна матриця. Крім того, з 3.13 випливає, що коли  $N$ -елементарна матриця, то  $N^{-1} Q_1 N$  буде елементарною матрицею. Оскільки  $W$  є добутком нормальних матриць, то  $W^{-1} Q_1 W = Q_2$ , де  $Q_2$  - елементарна матриця. Отже,  $V_1 V_2 \dots V_m V_{m+1} = V_1 D_1 W_1 A_1 B_1 = D_1 W_1 (W_1^{-1} D_1^{-1} V_1 D_1 W_1) A_1 B_1 = D_1 W_1 Q_2 A_1 B_1$ . Якщо  $Q_2 \in X$ , то  $Q_2 A_1 = A \in \bar{X}$ , і  $V_1 V_2 \dots V_m V_{m+1} = D_1 W_1 A B_1$ , де  $A \in \bar{X}$ ,  $B \in \bar{Y}$ . в цьому випадку теорема доведена.

Припустимо, що  $Q_2 \in Y$ . Тоді в силу леми 8,  $Q_2 A_1 = D_2 W_2 A_2 B_2$ , де  $D_2 \in \vartheta$ ,  $W_2 \in \bar{l}$ ,  $A_2 \in \bar{X}$ ,  $B_2 \in \bar{Y}$ . Тому  $V_1 V_2 \dots V_m V_{m+1} = D_1 W_1 Q_2 A_1 B_1 = D_1 W_1 D_2 W_2 A_2 B_2 B_1 = D_1 W_1 D_2 W_2 A_2 B$ , де  $A_2 \in \bar{X}$ ,  $B = B_2 B_1 \in \bar{Y}$ .

Якщо  $N \in l$ , то  $D_2^{-1} N D_2 \in l$ , в силу 3.16. Припустимо, що  $W_1 = N_1 N_2 \dots N_s$ , де  $N_i \in l$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ . Тоді  $D_2^{-1} W_1 D_2 = D_2^{-1} N_1 N_2 \dots N_s D_2 = D_2^{-1} N_1 D_2 \cdot D_2^{-1} N_2 D_2 \cdot \dots \cdot D_2^{-1} N_s D_2 = M_1 M_2 \dots M_s$ , де  $M_i = D_2^{-1} N_i D_2 \in l$ , і значить  $D_2^{-1} W_1 D_2 = W_3 \in \bar{l}$ . Тому  $V_1 V_2 \dots V_m V_{m+1} = D_1 D_2 D_2^{-1} W_1 D_2 W_2 A_2 B = D_1 D_2 W_3 W_2 A_2 B = D_3 W_4 A_2 B$ , де  $D_3 = D_1 D_2 \in \vartheta$ ,  $W_4 = W_3 W_2 \in \bar{l}$ ,  $A_2 \in \bar{X}$ ,  $B \in \bar{Y}$ .

Теорема доведена.

Квадратна матриця  $A$  називається мономіальною, якщо в кожному її рядку є єдиний, відмінний нуля елемент. Очевидно, будь-яка діагональна матриця з множини  $\vartheta$  і всяка нормальна матриця  $L_{ij}(\lambda)$  є мономіальними.

ЛЕМА 5.6.

Добуток кількох мономіальних матриць є мономіальною матрицею.

Доведення:

Достатньо довести теорему для випадку двох співмножників. Нехай  $C=AB$ , де  $A$  і  $B$  - мономіальні матриці;  $C=(\gamma_{ij})$ ,  $A=(\alpha_{ij})$ ,  $B=(\beta_{ij})$ . За означенням добутку матриць,  $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \beta_{kj}$ . Так як матриця  $C$  мономіальна, то існує такий індекс  $s$ , що  $\alpha_{ik}=0$ , якщо  $k \neq s$ , але  $\alpha_{is} \neq 0$ . З іншої сторони, з мономіальності матриці  $B$  випливає існування такого індекса  $t$ , що  $\beta_{sj}=0$ , якщо  $j \neq t$ ;  $\beta_{st} \neq 0$ . Звідси випливає, що  $\gamma_{it} \neq 0$ ,  $\gamma_{ij}=0$  при  $j \neq t$ . З довільності вибору індекса випливає мономіальність матриці  $C$ .

Лема доведена.

ЛЕМА 5.7.

Якщо  $G \in \bar{x}$ ,  $H \in \bar{Y}$ , і  $GH$  - мономіальна матриця, то  $G=E$ ,  $H=E$ .

Доведення:

Нехай  $G=(p_{ij})$ ,  $H=(h_{ij})$ ,  $i, j=1, 2, \dots, n$ . Так як  $G \in \bar{x}$ , то  $p_{nn}=1$ ,  $p_{nj}=0$  при  $j \neq n$ . Тому, якщо  $GH=(w_{ij})$ , то  $w_{ni}=h_{ni}$ . В силу леми 5.6, матриця  $GH$  - мономіальна, і  $w_{nn}=h_{nn}=1$ ; тому  $w_{nj}=h_{nj}=0$  при  $j \neq n$ . Отже, останній рядок матриці  $H$  співпадає з останнім рядком одиничної матриці. З іншої сторони, з включення  $H \in \bar{Y}$  випливає, що  $h_{nn}=1$ ,  $h_{jn}=0$ , при  $n \neq j$ . Отже,  $w_{jn}=p_{jn}$ ; так як матриця  $GH$ -мономіальна, і  $w_{nn}=p_{nn}=1$ , то  $p_{jn}=w_{jn}=0$  при  $j \neq n$ . тому останній стовпець матриці  $G$  співпадає з останнім стовпцем одиничної матриці. Припустимо, що рядки матриці  $H$  з номерами  $s+1, s+2, \dots, n$  співпадають з відповідними рядками одиничної матриці і стовпці матриці  $H$  з номерами  $s+1, s+2, \dots, n$  співпадають з відповідними стовпцями одиничної матриці. Так як  $G \in \bar{x}$ , то  $p_{ss}=1$ ,  $p_{si}=0$  при  $s > i$ . Крім того, в силу індуктивного припущення,  $p_{si}=0$  при  $s < i$ . Тому  $w_{si}=h_{si}$ ; так як матриця  $GH$  мономіальна, і  $w_{ss}=h_{ss}=1$ , то  $w_{si}=h_{si}=0$  при  $i \neq s$ . Отже, рядок матриці  $H$  з номером  $s$  співпадає з відповідним рядком одиничної матриці. Аналогічно можна довести, що стовпець з номером  $s$  матриці  $G$  співпадає з відповідним стовпцем одиничної матриці. Припущення індукції виправдане.

Лема доведена.

Позначимо через  $l_i$  множину всіх матриць виду  $L_{ij}(\lambda)$ ,  $\lambda \in R$ ,  $i \neq j$ . Очевидно, що матриця  $L_{ji}(\lambda)=L_{ij}(-\lambda^{-1})$  також належить  $l_i$ . Тому якщо  $L_{rs}(\beta)$  не належить  $l_i$ , то  $r \neq i$ ,  $s \neq i$ .

ЛЕМА 5.8.

Нехай  $W \in \bar{l}$ ; тоді  $W$  можна представити у вигляді:  $W=B_1, B_2, \dots, B_r, C_1, C_2, \dots, C_s$  де  $B_i \in l_m$ ,  $i=1, 2, \dots, r$ ,  $m$  - деяке число  $1 \leq m \leq n$ ,  $C_j \in l-l_m$ ,  $j=1, 2, \dots, s$ .

Доведення:

Так як  $W \in \bar{l}$ , то  $W=A_1, A_2, \dots, A_t$ ;  $A_i \in l$ ,  $i=1, 2, \dots, t$ . Припустимо, що  $A_i \in l-l_m$ ,  $A_{i+1} \in l_m$ . Тоді  $A_i=L_{jk}(\lambda)$ ,  $j \neq m$ ,  $k \neq m$ ;  $A_{i+1}=L_{mr}(\gamma)$ . Якщо  $j \neq r$ ,  $k \neq r$ , то за означенням 3.12, і властивістю 3.14, випливає, що  $A_i A_{i+1}=A_{i+1} A_i$ .

Нехай тепер  $j = m$ . Тоді, в силу властивості 3.17,  $A_i A_{i+1} = L_{mk}(\lambda) L_{mr}(\gamma) = L_{mr}(\gamma) L_{kr}(-\lambda^{-1}\gamma) = BC$ , де  $B = L_{mr}(\gamma) \in l_m$ ,  $C = L_{kr}(-\lambda^{-1}\gamma) \in l - l_m$ . Нарешті, якщо  $k = r$ , то  $A_i = L_{jk}(\lambda) = L_{kj}(-\lambda^{-1})$ , і даний випадок зводиться до попереднього. Таким чином, у всіх випадках добуток  $A_i A_{i+1}$ , де  $A_i \in l - l_m$ ,  $A_{i+1} \in l_m$  може бути представлений у вигляді  $A_i A_{i+1} = BC$ ,  $B \in l_m$ ,  $C \in l - l_m$ . Виконуючи вказану перестановку певну кількість разів, представимо вираз  $W$  в тому виді, про який йде мова у формулюванні леми.

Лема доведена.

ЛЕМА 5.9.

Якщо  $W \in \bar{l}$ ,  $W = A B_1 B_2 \dots B_r$ , де  $A \in l_m$ ,  $B_i \in l - l_m$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , то  $W$  не може бути діагональною матрицею.

Доведення:

Нехай  $B_1 = (\lambda_{ij})$ ,  $B_2 = (\mu_{ij})$ ; так як  $B_1 \in l - l_m$ , то  $\lambda_{mm} = 1$ . З тієї ж причини  $\mu_{mm} = 1$ . Так як матриці  $B_1$  і  $B_2$  мономіальні, то в кожній з них рядок з номером  $m$  співпадає з відповідним рядком одиничної матриці. Таку ж властивість має і добуток  $B_1 B_2$ . Повторюючи ці міркування певну кількість разів, доведемо що в матриці  $B_1 B_2 \dots B_k$  рядок з номером  $m$  співпадає з відповідним рядком одиничної матриці. Оскільки  $A \in l_m$ , то  $A = L_{mr}(\gamma)$ , для деякого  $\gamma$ ,  $m \neq r$ . Якщо  $A = (\alpha_{ij})$ , то  $\alpha_{rm} = -\gamma^{-1}$ . Звідси легко отримати, що в матриці  $W = A B_1 B_2 \dots B_k$  елемент, що знаходиться на перетині рядка з номером  $r$  і стовпця з номером  $m$ , дорівнює  $-\gamma^{-1} \neq 0$ . Отже, матриця  $W$  не є діагональною.

ОЗНАЧЕННЯ 5.2.

Квадратна матриця порядку  $n$  називається невиродженою, якщо її ранг дорівнює  $n$ .

ТЕОРЕМА 5.2.

Якщо  $A$  невироджена квадратна матриця, то існують такі елементарні матриці  $U_1 U_2 \dots U_r$ , що  $U_1 U_2 \dots U_r A$  буде діагональною.

Доведення:

Нагадаємо, що елементарними матрицями називаються матриці виду  $F_{ij} = E + E_{ij}(\lambda)$ ,  $i \neq j$ . З означення ступінчатої матриці і теореми 4.3, випливає, що існують елементарні матриці  $V_1 V_2 \dots V_k$ , такі, що добуток  $S = V_1 V_2 \dots V_k A$  буде верхньою трикутною матрицею, в якій всі діагональні елементи не дорівнюють нулю. Нехай

$$S = \left[ \begin{array}{c|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & B & & \\ \dots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right], \text{ тоді } \prod_{i=2}^m F_{1i}(-\alpha_{1i}\alpha_{11}^{-1})S = S_1, \text{ де}$$

$$S_1 = \left[ \begin{array}{c|cccc} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & B_1 & & \\ \dots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right], \alpha_{ii} - \text{діагональні елементи матриці } S.$$

Так як елементи матриці мають обернені, то в силу теореми 4.1, матриця  $S_1$  має ранг  $n$ , а значить матриця  $B_1$  має ранг  $n-1$ . Оскільки порядок матриці  $B_1$  дорівнює  $n-1$ , то за індукцією припустимо, що  $Q_1 Q_2 \dots Q_l B_1 = D_1$ , де  $D_1$  - діагональна матриця, а  $Q_i$  - елементарна матриця порядку  $(n-1)$ . Нехай

$$Q_i^* = \left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & Q_1 & & \\ \dots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right], i=1, 2, \dots, l.$$

Очевидно,  $Q_i^*$  елементарні матриці порядку  $n$ , причому з леми 3.1, випливає, що  $Q_1 Q_2 \dots Q_l S_1$  - діагональна матриця.

Таким чином, добуток  $Q_1 Q_2 \dots Q_l \prod_{i=2}^m F_{1i}(-\alpha_{1i} \bar{\alpha} \alpha_{ii}) V_1 V_2 \dots V_k A$  - діагональна матриця, причому всі її співмножники, крім останнього, - елементарні матриці.

Теорема доведена.

### ОЗНАЧЕННЯ 5.3.

Будь-яка діагональна матриця  $D$ , що отримана з матриці  $A$  множенням на елементарні матриці, називається діагональною формою матриці  $A$ .

### ЛЕМА 5.10.

Якщо матриця  $A = U_1 U_2 \dots U_k$ , де  $U_i$  - елементарна матриця,  $i=1, 2, \dots, k$ , то  $A$  - має обернену матрицю, причому  $A^{-1} = W_1 W_2 \dots W_k$ , і  $W_i = U_{k-i+1}^{-1}$  - елементарна матриця.

Доведення:

Безпосередньою перевіркою можна впевнитись, що  $AW_1W_2\dots W_k=E$ , тобто матриця  $W_1W_2\dots W_k$  є оберненою для матриці  $A$ . В силу властивості 3.2, матриця  $W_i$  є елементарною,  $i=1, 2, \dots, k$ .

Лема доведена.

ТЕОРЕМА 5.3.

Квадратна матриця  $A$  порядку  $n$  має обернену матрицю тоді і тільки тоді, коли матриця  $A$  не вироджена.

Доведення:

*Необхідність.*

Нехай матриця  $A$  має обернену матрицю. Тоді існує така матриця  $X$ , що  $AX=XA=E$ . Очевидно ранг одиничної матриці  $E$  дорівнює  $n$ , ранг матриці  $A$  не перевищує  $n$  (в системі векторів - рядків матриці  $A$  рівно  $n$  елементів). З іншого боку, ранг матриці  $E$ , в силу теореми 4.5, не перевищує ранга матриці  $A$ . Тому ранг матриці  $A$  дорівнює  $n$  і  $A$  - невироджена матриця.

*Достатність.*

Нехай матриця  $A$  - невироджена. В силу теореми 5.2,  $V_1V_2\dots V_kA=D$ , де  $D$  - діагональна матриця, в якій всі  $n$  елементів головної діагоналі відмінні від нуля (ранг матриці  $A$  дорівнює  $n$ ). В цьому випадку, як відомо, матриця  $D$  має обернену матрицю (див. приклад 3.2). Нехай  $D^{-1}$  - матриця, обернена матриці  $D$ . Тоді  $D^{-1}V_1V_2\dots V_kA=E$ . Отже, матриця  $A$  має обернену матрицю  $A^{-1}=DV_1^{-1}V_2^{-1}\dots V_k^{-1}$ . Теорема доведена.

ЛЕМА 5.11.

Якщо  $W \in \bar{l}$ , і  $W$  є діагональною матрицею, то  $W \in \vartheta$ .

Доведення:

Твердження леми очевидне, якщо  $W=E$ . Припустимо, що  $W \neq E$ . Тоді  $W=A_1A_2\dots A_s$ , де  $A_i \in l$ ,  $i=1, 2, \dots, s$ . Будемо доводити лему індукцією по  $s$ . Очевидно випадок  $s=1$  неможливий, тому що ніяка матриця з множини  $l$  не є діагональною. Припустимо, що  $s=2$ . Тоді, якщо  $A_1=L_{ij}(\alpha)$ , то  $W$  буде діагональною тільки в тому випадку, коли  $A_2=L_{ij}(\beta)$ . В силу властивості 3.9,  $W=A_1A_2=L_{ij}(\alpha)L_{ij}(\beta) \in \vartheta$ . Припустимо, що лема справедлива для всіх  $s \leq t$ . Розглянемо випадок, коли  $s=t+1$ . Очевидно, існує такий індекс  $m$ ,  $1 \leq m \leq n$ , що один з співмножників  $A_i$  належить  $l_m$ . В

силу леми 5.8, матрицю  $W$  можна представити у вигляді:  $W=B_1, B_2, \dots, B_k \ C_1, C_2, \dots, C_l$  де  $B_i \in l_m$ ,  $C_j \in l-l_m$ , причому  $k+l=s+t+l$ . Згідно з лемою 5.9,  $k>1$ . Нехай  $B_{k-1}=L_{mp}(\alpha)$ ,  $B_k=L_{mq}(\beta)$ . Припустимо спочатку, що  $p=q$ . Тоді  $B_k B_{k-1}=L_{mp}(\alpha) L_{mq}(\beta)=T \in \vartheta$ , в силу властивості 3.9. звідси отримаємо:  $W=B_1, B_2, \dots, B_{k-1} B_k \ C_1, C_2, \dots, C_l=B_1, B_2, \dots, B_{k-2} T C_1, C_2, \dots, C_l=B_1, B_2, \dots, B_{k-2} \times C_1 T^{-1} T C_2 T^{-1} \dots T C_l T^{-1} T$ . Позначимо через  $U_i$  матрицю  $T C_i T^{-1}$ . За властивістю 3.16,  $U_i \in l-l_m$ . Таким чином,  $W=B_1, B_2, \dots, B_{k-2} U_1 U_2 \dots U_l T$ . Звідси випливає, що  $B_1, B_2, \dots, B_{k-2} U_1 U_2 \dots U_l = W T^{-1} \in l$ ; крім того, матриця  $W T^{-1}$  є діагональною. Так як число співмножників, що входять у вираз  $W T^{-1}$  дорівнює  $k+l-2=s-2<s$ , то за припущенням індукції,  $W T^{-1} \in \vartheta$ . Отже,  $W=(WT)T \in \vartheta$ .

Нехай тепер  $p \neq q$ ; якщо  $B_{k-1}=L_{mp}(\alpha)$ ,  $B_k=L_{mq}(\beta)$ , то в силу властивості 3.17,  $B_{k-1} B_k=L_{mp}(\alpha) L_{mq}(\beta)=L_{mq}(\beta) L_{pq}(\alpha^{-1}\beta)$ . Таким чином,  $W=B_1, B_2, \dots, L_{mq}(\beta) L_{pq}(\alpha^{-1}\beta) C_1, C_2, \dots, C_l$ , тобто число співмножників з  $l_m$ , що входять у вираз  $W$ , зменшилося на одиницю, а загальне число співмножників не зміниться. Отже число співмножників з  $l_m$ , що входять у вираз  $W$ , можна зменшити на одиницю. З іншої сторони, це число не може дорівнювати 1, в силу леми 5.9. Тому на якомусь етапі повинно бути скорочення числа співмножників, що входять у вираз  $W$ , що приведе за собою включення  $W \in D$ . Лема доведена.

#### ТЕОРЕМА 5.4.

Якщо  $B$  і  $C$  - діагональні форми квадратної матриці  $A$ , то добутки діагональних елементів цих матриць рівні.

#### Доведення:

Розглянемо спочатку випадок, коли матриця  $A$  є виродженою. Якщо всі діагональні елементи в діагональній формі  $B$  матриці  $A$  відмінна від нуля то матриця  $A$  буде невиродженою, що протирічить умові. Отже, в будь-якій діагональній формі виродженої квадратної матриці  $A$  є нульовий елемент. Тому добутки діагональних елементів в матрицях  $B$  і  $C$  дорівнюють нулю. Отже, для випадку виродженої квадратної матриці теорема справедлива. Розглянемо тепер невироджену матрицю  $A$ .

Припустимо, що  $B$  і  $C$  - дві діагональні форми матриці  $A$ . Тоді  $B=U_1 U_2 \dots U_k A$ ,  $C=W_1 W_2 \dots W_r A$ , (5.1), де  $U_i$ ,  $W_j$  - елементарні матриці,  $i=1, 2, \dots, k$ ;  $j=1, 2, \dots, r$ . Із співвідношень (5.1) випливає, що  $A=W_1^{-1} W_2^{-1} \dots W_r^{-1} C$ , і  $B=U_1 U_2 \dots U_k W_1^{-1} W_2^{-1} \dots W_r^{-1} C$ . В силу властивості 3.2, матриці  $W_j^{-1}$  є елементарними. За теоремою 5.1, добуток елементарних матриць

$U_1 U_2 \dots U_k W_1^{-1} W_2^{-1} \dots W_r^{-1} = D V G H C$ , де  $D \in \vartheta$ ,  $V \in \bar{l}$ ,  $G \in \bar{X}$ ,  $H \in \bar{Y}$ . Отже,  $B = D V G H C$ , звідси,  $GH = V^{-1} D^{-1} B C^{-1}$ . Так як  $V \in \bar{l}$ , то  $V$  є добутком декількох матриць з множини  $l$ , тобто є мономіальною. З леми 5.6, і властивості 3.10, випливає, що матриця  $V^{-1}$  також є мономіальною. Матриці  $D^{-1}$ ,  $C^{-1}$ ,  $B$  - діагональні, а значить, мономіальні. Застосувавши лему 5.6 ще раз, отримаємо, що матриця  $GH = V^{-1} D^{-1} B C^{-1}$  мономіальна. Тоді за лемою 5.7, отримаємо, що  $G=E$ ,  $H=E$ . Таким чином,  $E = V^{-1} D^{-1} B C^{-1}$ ; звідси  $V = D^{-1} B C^{-1}$ . Так як  $D^{-1} B C^{-1}$  - діагональна матриця, то в силу леми 5.11,  $V \in \vartheta$ . Отже,  $D^{-1} B C^{-1} = Q \in \vartheta$ . Звідси  $B = D C Q \in \vartheta$ , і тому добуток діагональних елементів в матрицях  $B$  і  $C$  рівні.

Теорема доведена.

#### ОЗНАЧЕННЯ 5.4.

Добуток діагональних елементів в будь-якій діагональній формі квадратної матриці  $A$  називається визначником матриці  $A$ .

Очевидно, визначник виродженої матриці дорівнює нулю. Як було встановлено вище, квадратна матриця має обернену тоді і тільки тоді, коли вона невироджена.

#### ТЕОРЕМА 5.5.

Квадратна матриця є невиродженою тоді і тільки тоді, коли її визначник відмінний від нуля.

#### Доведення:

##### *Необхідність.*

Якщо  $A$  - квадратна матриця порядку  $n$  є невиродженою, то за означенням її ранг дорівнює  $n$ , а значить всі діагональні елементи в її діагональній формі відмінні від нуля, оскільки діагональна форма є ступінчатою матрицею. Тому визначник матриці  $A$  також відмінна від нуля.

##### *Достатність.*

Якщо визначник квадратної матриці  $A$  не дорівнює нулю, то її дагональна форма є ступінчатою матрицею. Так як визначник матриці  $A$  не дорівнює нулю, то в її діагональній формі немає нульових рядків. Отже, її ранг дорівнює  $n$ , за означенням матриця  $A$  невироджена.

Теорема доведена.

Розглянемо тут практичний спосіб відшукування оберненої матриці для невиродженої матриці  $A$ , який називається методом Гауса. Згідно з теоремою 4.4, невироджену квадратну матрицю  $A$  можна привести до діагонального виду  $D$  множенням зліва на елементарні матриці. Якщо



$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ то } \lambda_i \neq 0, i=1, 2, \dots, n,$$

так як  $A$ -невироджена матриця. Отже,  $D_1(\lambda_1^{-1}) D_2(\lambda_2^{-1}) \dots D_n(\lambda_n^{-1}) D = E$ , де  $D_i(\lambda_i^{-1})$  - діагональна матриця, в якій елемент діагоналі з номером  $i$  дорівнює  $\lambda_i^{-1}$ , а інші діагональні елементи дорівнюють 1. Так як  $D = V_1 V_2 \dots V_k A$ , де  $V_i$  - елементарні матриці,  $i=1, 2, \dots, k$ , то  $U_1 U_2 \dots U_m A = E$ , (5.2) де  $U_j$  є одною з матриць виду  $V_i, D_i(\lambda_i^{-1})$ . З рівності (5.2) отримаємо, що  $A^{-1} = U_1 U_2 \dots U_m E$ . Таким чином, щоб отримати обернену матрицю до невиродженої матриці  $A$ , потрібно матрицю  $A$  за допомогою множення зліва на матриці виду  $F_{ij}(\lambda), D_j(\lambda)$  привести до одиничної; паралельно з цим проводячи множення зліва одиничної матриці на такі ж самі матриці отримаємо обернену матрицю  $A^{-1}$ .

Нехай  $A$  - матриця довільного розміру  $m \times n$  і  $k$ -натуральне число,  $1 \leq k < m, 1 < k < n$ . Виділимо будь-які  $k$ -рядків і  $k$ -стовпців матриці  $A$ .

#### ОЗНАЧЕННЯ 5.5.

Мінором  $k$ -го порядку матриці  $A$  називається визначник матриці  $B$  розміру  $k \times k$ , який складається з виділених  $k$  рядків і стовпців матриці  $A$ , розміщених в тому ж порядку, що і в матриці  $A$ .

#### ***Перечислимо властивості визначників:***

5.1. Визначник транспонованої матриці дорівнює визначнику вихідної матриці.

#### Доведення.

Нехай  $A$  - квадратна матриця,  $D$ - її діагональна форма. Тоді, за означенням,

$D=U_1U_2\ldots U_kAV_1V_2\ldots V_m$ , де  $V_i, U_j$  - елементарні матриці  $i=1, 2, \ldots, k, j=1, 2, \ldots, m$ . Якщо  $U_j=F_{rs}(\lambda)$ , то  $U_j^T=F_{sr}(\lambda)$ , тому матриця, транспонована до елементарної також буде елементарною. Крім того,  $D^T=D$ . Отже,  $D=D^T=V_m^T V_{m-1}^T \ldots V_1^T A^T U_k^T U_{k-1}^T \ldots U_1^T$ , і матриця D буде діагональною формою матриці  $A^T$ , тобто  $|A^T|=|A|$ .

З властивості 5.1 випливає, що в теорії визначників рядки і стовпці матриці приймають участь на рівних засадах.

Інакше кажучи, в будь-якому істинному твердженні про визначники слово "рядок" можна замінити на слово "стовпець" і навпаки.

5.2. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) матриці рівні нулю, то визначник цієї матриці дорівнює нулю.

5.3. Якщо два рядки (стовпці) матриці пропорціональні (рівні), то визначник матриці дорівнює нулю. Властивості 5.2, і 5.3 є наслідками з теорем 5.2 і 5.5.

5.4. Якщо всі елементи будь-якої матриці A помножити на одне і те саме число  $a$ , то визначник отриманої матриці буде дорівнювати  $a|A|$ .

#### Доведення.

Нехай B - матриця отримана з матриці A множенням її i-ого рядка на  $a$ . Тоді

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \dots & \\ & a & \\ & & \dots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} A; \text{ нехай } C = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \dots & \\ & a & \\ & & \dots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Якщо D - діагональна форма матриці A, то  $D=U_1U_2\ldots U_kAV_1V_2\ldots V_m$ . Нехай  $CU_iC^{-1}=W_i$ ,  $i=1, 2, \ldots, k$ . В силу властивості 3.8,  $W_i$  - також елементарна матриця. Тому  $C^{-1}W_iC=U_i$ , і  $W_1W_2\ldots W_kBV_1V_2\ldots V_m=W_1W_2\ldots W_kCAV_1V_2\ldots V_m=C(C^{-1}W_1C) \times (C^{-1}W_2C)\ldots (C^{-1}W_kC)AV_1V_2\ldots V_m=CU_1U_2\ldots U_kAV_1V_2\ldots V_m=CD$ . Отже, CD - діагональна форма матриці B, і добуток діагональних елементів матриці CD дорівнює добутку діагональних елементів матриці D на скаляр  $a$ . Звідси випливає дана властивість.

5.5. Визначник матриці не зміниться, якщо до будь-якого його рядка (стовпця) додати інший рядок (стовпець), помножений на число  $\lambda$ .

#### Доведення.

Для виконання сказаного у формулюванні перетворення матриці потрібно помножити її зліва (справа) на елементарну матрицю  $F_{ij}(\lambda)$  для потрібних номерів  $i, j$ . Множення на елементарну матрицю очевидно не змінює діагональну форму матриці, а тому залишає незмінним її визначник.

5.6. Якщо переставити місцями два рядки (стовпці) матриці  $A$ , то визначник отриманої матриці дорівнює визначнику матриці  $A$ , взятому з протилежним знаком.

Доведення.

Перестановку рядків (стовпців) матриці  $A$  з номерами  $i, j$  можна здійснити множенням  $A$  зліва (справа) на матрицю  $P_{ij}$ , що отримана з одиничної шляхом перестановки рядків (стовпчиків) з номерами  $i, j$ . Позначимо через  $C$  діагональну матрицю, в якій діагональний елемент рядка з номером  $j$  дорівнює  $(-1)$ , а інші діагональні елементи дорівнюють  $1$ . Безпосередньою перевіркою можна впевнитись, що  $P_{ij} = F_{ij}(-1)F_{ij}(1) \times F_{ij}(-1)C$ . Тоді за властивістю 5.5, визначник матриці  $F_{ij}(-1)F_{ij}(1)F_{ij}(-1)A$  дорівнює визначнику матриці  $A$ . Звідси за властивістю 5.4 отримаємо, що визначник матриці  $P_{ij}A$  дорівнює визначнику матриці  $A$ , помноженому на  $(-1)$ .

5.7. Визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць.

Доведення.

Достатньо цю властивість довести для двох співмножників  $A$  і  $B$ . Якщо одна з матриць вироджена, наприклад  $A$ , то в силу теореми 4.5 виродженою також буде матриця  $AB$ . Тому  $|AB|=0$ ,  $|A||B|=0$ . В цьому випадку дана властивість справедлива.

Нехай  $A$  і  $B$  не вироджені матриці. В силу теореми 5.5, і властивості 5.1,  $B^T$  - також не вироджена. Якщо  $D_1$  і  $D_2$  - діагональні форми матриць  $A$  і  $B^T$ , то згідно з теоремою 5.2  $= U_1 U_2 \dots U_k A = D_1$ ,  $V_1 V_2 \dots V_m B^T = D_2$ . Звідси,  $D_2 = D_2^T = B V_m^T V_{m-1}^T \dots V_1^T$ . Тому  $U_1 U_2 \dots U_k (AB) V_m^T V_{m-1}^T \dots V_1^T = D_1 D_2$ ; тут  $U_i, V_j, V_j^T$  - елементарні матриці. Отже,  $D_1 D_2$  - діагональна форма матриці  $AB$ . Якщо  $d_i$  - добуток діагональних елементів матриці  $D_i$ ,  $i=1, 2$ , а  $d$  - добуток діагональних елементів матриць  $D$ , то  $d = d_1 d_2$ , причому  $d = |AB|$ ,  $d_1 = |B|$ ,  $d_2 = |A|$ . Властивість доведена.

5.8. Визначник діагональної матриці дорівнює добутку діагональних елементів цієї матриці.

Властивість випливає з означення визначника квадратної матриці.

5.9. Якщо матриця  $A$  має обернену матрицю, то визначник матриці  $A^{-1}$  дорівнює  $|A|^{-1}$ .

Доведення.

Так як  $A^{-1}A=E$  і визначник одиничної матриці дорівнює 1, то  $1=|A^{-1}A|=|A^{-1}||A|$ ; тому  $|A^{-1}|=|A|^{-1}$ .

ТЕОРЕМА 5.6.

Ранг матриці дорівнює найбільшому з порядків її мінорів, які не дорівнюють нулю.

Доведення:

Нехай  $k$  ранг матриці  $A$  розміру  $m \times n$ ;  $1 \leq k \leq m$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Доведемо, що будь-який мінор матриці  $A$  порядку більшого  $k$  дорівнює нулю. Нехай  $s > k$  і  $B$  - матриця розміру  $s \times s$ , що складається з деяких  $s$  рядків і  $s$  стовпців матриці  $A$ . Так як  $s > k$ , то рядки матриці  $A$ , з яких складається матриця  $B$ , лінійно залежні. Тоді, очевидно, рядки самої матриці  $B$  також лінійно залежні, і її визначник дорівнює нулю. Отже, мінор порядку  $s > k$  дорівнює нулю. Доведемо тепер, що в матриці  $A$  існує мінор порядку  $k$ , який не дорівнює нулю. Так як ранг матриці  $A$  дорівнює  $k$  то існує  $k$ , лінійно незалежних рядків матриці  $A$ . Складемо з них матрицю  $A_1$ ; розмір матриці  $A$  дорівнює  $k \times n$ . Очевидно, ранг матриці  $A_1$  також дорівнює  $k$ . Тому в матриці  $A_1$  є  $k$  лінійно незалежних стовпців. Складемо з цих стовпців матрицю  $B$  розміру  $k \times k$ . Ранг матриці  $B$  також дорівнює  $k$  і, в силу теореми 5.5, її визначник, який є мінором матриці  $A$   $k$ -го порядку, не дорівнює нулю.

Теорема доведена.

Нехай  $A=(a_{ij})$  квадратна матриця розміру  $n \times n$ .

ОЗНАЧЕННЯ 5.6.

Алгебраїчним доповненням елемента  $a_{rs}$  в квадратній матриці  $A$  називається скаляр  $(-1)^{r+s}b$ , де  $b$  - мінор  $(n-1)$  порядку матриці  $A$ , отриманий вилученням з неї рядка з номером  $r$  і стовпця з номером  $s$ .

5.10. Якщо всі елементи будь-якого рядку (стовпця) матриці  $A$ , крім одного, дорівнюють нулю, то визначник матриці  $A$  дорівнює добутку вказаного ненульового елемента на його алгебраїчне доповнення.

Доведення:

Доведемо спочатку цю властивість для випадку, коли  $a_{11} \neq 0$ ,  $a_{ij} = 0$  при  $j > 1$ . Нехай

$$A = \left[ \begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{21} & & & & \\ a_{31} & & B & & \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & & & & \end{array} \right].$$

Нам потрібно довести, що  $a_{11} |B| = |A|$ . Нехай  $D_1$  - діагональна форма матриці  $B$ . Тоді  $D_1 = U_1 U_2 \dots U_k B V_1 V_2 \dots V_m$ , де порядок елементарних матриць  $U_i, V_j$  на одиницю менший за порядок матриці  $A$ ,  $|B|$  дорівнює добутку діагональних елементів матриці  $D_1$ . Тому

$$\left[ \begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{21} & & & & \\ a_{31} & & D_1 & & \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & & & & \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_k \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_m \end{bmatrix}$$

З цієї рівності випливає, що визначник матриці  $A$  дорівнює визначнику матриці

$$\left[ \begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{21} & & & & \\ a_{31} & & D_1 & & \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & & & & \end{array} \right] = B_1.$$

Так як  $a_{11} \neq 0$ , то після множення матриці  $B_1$  зліва на

$$F_{12}(-a_{11}a_{21}) F_{31}(-a_{11}a_{31}^{-1}) \dots F_{n1}(-a_{11}a_{n1}^{-1}) \text{ отримаємо матрицю } \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix}.$$

Матриця  $D$  є діагональною формою матриці  $A$  і значить  $|A| = a_{11} |B|$ . Нехай тепер  $a_{ij} \neq 0$ ,  $a_{ik} = 0$ , при  $k \neq j$ . Позначимо через  $B$  матрицю, отриману з  $A$  вилученням рядка з номером  $i$  та стовпця з номером  $j$ . Перетворимо матрицю  $A$  таким чином: переставимо рядок з номером  $i$  послідовно з усіма попередніми рядками, вивівши його на перше місце; аналогічно виведемо стовпець з номером  $j$  на місце першого стовпця, переставляючи його з усіма попередніми. Отриману матрицю позначимо через  $C$ :

$$C = \left[ \begin{array}{c|cccc} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & & & & \\ c_{31} & & B & & \\ \dots & & & & \\ c_{n1} & & & & \end{array} \right], \text{ де } c_{1j} = a_{ij}.$$

На основі властивості 5.6,  $|C| = (-1)^{i+j-2} |A|$ . В силу попередніх міркувань,  $|C| = a_{ij} |B|$ . Звідси  $a_{ij} |B| = (-1)^{i+j} |A|$ , або  $|A| = a_{ij} (-1)^{i+j} |B|$ . Причому  $(-1)^{i+j} |B|$  є алгебраїчним доповненням елемента  $a_{ij}$ .

5.11

- Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) квадратної матриці на їх алгебраїчні доповнення не зміниться, якщо цю матрицю помножити зліва (справа) на елементарну матрицю;
- Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) квадратної матриці на їх алгебраїчні доповнення дорівнює визначнику цієї матриці;
- Якщо всі елементи рядка (стовпця) з номером  $i$  квадратної матриці дорівнюють сумах двох доданків, то визначник цієї матриці дорівнює сумі визначників двох матриць, в кожній з яких всі рядки (стовпці), з номерами, відмінними від  $i$ , співпадають з відповідними рядками даної матриці, а рядок (стовпець) з номером  $i$  в першій матриці складається з перших доданків, а в другій - з других доданків.

Доведення:

Встановимо спочатку, що з 5.11 а) випливає 5.11 б) і 5.11 с). Дійсно, припустимо, що сума добутків елементів рядка матриці  $A$  на їх алгебраїчні доповнення не змінюється при множенні цієї матриці справа на елементарну матрицю. Якщо всі елементи рядка з номером  $i$  матриці  $A$  дорівнюють нулю, то властивість 5.11 б) очевидно має місце. Припустимо, що елемент  $a_{ij} \neq 0$ . Безпосередньою перевіркою можна впевнитись, що в матриці

$B = A \prod_{k \neq j} F_{jk}(-a_{ij}^{-1} a_{ik})$  всі елементи рядка з номером  $i$  дорівнюють нулю, крім елемента, що

стоїть у стовпці з номером  $j$ . Нехай  $B = (\beta_{rs})$ ; в силу властивості 5.5,  $|B| = |A|$ ; з іншої сторони, за

властивістю 5.10,  $|B| = \beta_{ij} B_{ij} = \sum_{k=1}^n \beta_{ik} B_{ik}$ , де  $B_{ik}$  - алгебраїчне доповнення елемента  $\beta_{ik}$  ( тут

використовується те, що  $\beta_{ik} = 0$  при  $k \neq j$ ). Так як при множенні матриці  $A$  справа на елементарні матриці  $F_{ik}(\lambda)$  сума добутків елементів рядка з номером  $i$  на їх алгебраїчні

доповнення не змінюється, то  $|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}$ , де через  $A_{ik}$  позначається алгебраїчне доповнення до елемента  $a_{ik}$ . Властивість 5.11 б) доведена.

Припустимо тепер, що кожен елемент рядка матриці  $A$  з номером  $i$  дорівнює сумі двох доданків:  $a_{ij} = \beta_{ij} + \gamma_{ij}$ . Якщо  $A$  - алгебраїчне доповнення до елемента  $a_{ik}$ , то за властивістю 5.11 б),  $|A| = \sum_{k=1}^n (\beta_{ik} + \gamma_{ik}) A_{ik} = \sum_{k=1}^n \beta_{ik} A_{ik} + \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} A_{ik} = |B| + |C|$ , де  $B$  і  $C$  - квадратні матриці, в яких всі рядки з номером  $i$  співпадають з відповідними рядками матриці  $A$ ; рядок з номером  $i$  в матриці  $B$  складається з елементів  $\beta_{ij}$ , а в матриці  $C$  - з елементів  $\gamma_{ij}$ . Отже, властивість 5.11 с) доведена.

Доведемо властивість 5.11 а). У випадку, коли порядок  $n$  матриці  $A$  дорівнює 2 то безпосередньою перевіркою можна встановити справедливості даної властивості.

Припустимо за індукцією, що вказана властивість справедлива для квадратної матриці порядку  $n > 2$ . Розглянемо квадратну матрицю  $A = (a_{ij})$  порядку  $n+1$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,j} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix}.$$

В матриці  $B = A F_{kj}(\lambda)$  всі стовпці, крім стовпця з номером  $j$ , співпадають з відповідними стовпцями матриці  $A$ ; стовець з номером  $j$  в матриці  $B$  складається з елементів  $\alpha_{1j} + \lambda \alpha_{1k}$ ,  $\alpha_{2j} + \lambda \alpha_{2k}$ , ...,  $\alpha_{nj} + \lambda \alpha_{nk}$ :

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} + \lambda a_{1k} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} + \lambda a_{2k} & \dots & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,j} + \lambda a_{n+1,k} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

(тут мається на увазі, що  $k > j$ ; однак в подальших міркуваннях нічого не зміниться, якщо  $j$  буде більшим ніж  $k$ ). Позначимо через  $G_{pq}$  і  $H_{pq}$  матриці порядку  $n$ , отримані з матриць  $A$  і  $B$  відповідно вилученням рядка з номером  $p$  і стовпця з номером  $q$ . Нехай  $A_{pq}$  і  $B_{pq}$  - алгебраїчні доповнення елементів, які знаходяться на перетині рядка з номером  $p$  і стовпця з номером  $q$  в матрицях  $A$  і  $B$  відповідно. Тоді  $A_{pq} = (-1)^{p+q} |G_{pq}|$ ,  $B_{pq} = (-1)^{p+q} |H_{pq}|$ . Встановимо, що при  $q \neq k$   $A_{pq} = B_{pq}$ . Розглянемо випадок, коли  $p=1$ ,  $q=1$ . Маємо:

$$G_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2,n+1} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \dots & a_{n+1,j} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix},$$

$$H_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & \dots & a_{2j} + \lambda a_{2k} & \dots & a_{2k} & a_{2,n+1} \\ a_{32} & \dots & a_{3j} + \lambda a_{3k} & \dots & a_{3k} & a_{3,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,j} + \lambda a_{n+1,k} & \dots & a_{n+1,k} & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

Матриця  $H_{11}$  отримана з матриці  $G_{11}$  множенням стовпця з номером  $k$  і додаванням його до стовпця з номером  $j$ , що за властивістю 3.19 рівносильно множенню матриці  $G_{11}$  на елементарну матрицю. В силу властивості 5.5,  $|G_{11}| = |H_{11}|$ , а отже,  $A_{11} = B_{11}$ . За допомогою аналогічних міркувань можна довести рівність  $A_{pq} = B_{pq}$  для всіх  $p, q \neq k$ . Розглянемо тепер випадок  $p=1, q=k$ :

$$H_{1k} = \begin{bmatrix} a_{22} & \dots & a_{2j} + \lambda a_{2k} & \dots & \dots & a_{2,n+1} \\ a_{32} & \dots & a_{3j} + \lambda a_{3k} & \dots & \dots & a_{3,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,j} + \lambda a_{n+1,k} & \dots & \dots & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix}.$$

Оскільки порядок матриці  $H_{1k}$  дорівнює  $n$ , то за припущенням індукції виконується властивість 5.11 а), а значить, виконується властивість 5.11 с). Тому  $|H_{1k}| = |G_{1k}| + \lambda |W|$ , де  $W$  матриця, отримана з матриці  $G_{1k}$  послідовною перестановкою стовпця з номером  $k-1$  з попереднім  $k-j+1$  стовпцями. З властивості 5.6 випливає, що  $|W| = (-1)^{k-j+1} |G_{1j}|$ . Отже,  $|H_{1k}| = |G_{1k}| + (-1)^{k-j+1} \lambda |G_{1j}|$ . За допомогою аналогічних міркувань можна отримати для довільного  $i$   $|H_{ik}| = |G_{ik}| + (-1)^{k-j+i} \lambda |G_{ij}|$

Запишемо суму добутків елементів  $i$ -ого рядка матриці  $B$  на їх алгебраїчні доповнення:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \beta_{ir} B_{ir} &= \sum_{r \neq k, j} \beta_{ir} B_{ir} + \beta_{ij} B_{ij} + \beta_{ik} B_{ik} = \sum_{r \neq k, j} \alpha_{ir} A_{ir} + (\alpha_{ij} + \lambda \alpha_{ik}) A_{ij} + \alpha_{ik} (-1)^{i+k} |H_{ik}| = \\ &= \sum_{r \neq k, j} \alpha_{ir} A_{ir} + \alpha_{ij} A_{ij} + \lambda \alpha_{ik} A_{ij} + (-1)^{i+k} \alpha_{ik} (|G_{ik}| + (-1)^{k-j+i} \lambda |G_{ij}|) = \\ &= \sum_{r \neq k, j} \alpha_{ir} A_{ir} + \lambda \alpha_{ik} A_{ij} + \alpha_{ij} A_{ij} + (-1)^{i+k} \alpha_{ik} |G_{ik}| + (-1)^{-j} \lambda (-1)^{i+j} |G_{ij}| = \\ &= \sum_{r=1}^n \alpha_{ir} A_{ir} + \lambda \alpha_{ik} A_{ij} + (-1) \lambda \alpha_{ik} A_{ij} = \sum_{r=1}^n \alpha_{ir} A_{ir}. \end{aligned}$$

Тут ми скористувалися тим, що  $(-1)^{i+k} |G_{ik}| = A_{ik}$  і  $(-1)^{i+j} |G_{ij}| = A_{ij}$

Таким чином, припущення індукції виправдане, і властивість 5.11 а) доведена.



Відмітимо, що якщо елементи квадратної матриці  $A$  є многочленами, то в силу властивості визначником такої матриці також буде многочлен (за основне поле береться поле раціональних функцій від однієї змінної).

5.12. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці  $A$  на алгебраїчні доповнення елементів другого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Доведення:

Розглянемо суму  $\sum_{r=1}^n \alpha_{ir} A_{ir}$ . Нехай  $B$  - матриця, яка отримана з матриці  $A$  заміною рядка з номером  $j$  на рядок з номером  $i$ ; інші рядки матриць  $A$  і  $B$  співпадають. Визначник матриці  $B$  дорівнює нулю, тому що  $i$ -тий та  $j$ -тий рядки цієї матриці співпадають. З іншого боку, алгебраїчні доповнення для відповідних елементів  $j$ -го рядка матриць  $A$  і  $B$  також співпадають.

На основі сказаного у властивості 5.12 маємо  $\sum_{r=1}^n \alpha_{ir} A_{jr} = 0$ .

5.13. Якщо  $A=(a_{ij})$  невироджена квадратна матриця,  $A_{ij}$  - алгебраїчне доповнення до елементу  $a_{ij}$ , то матриця  $A^{-1}$  має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Доведення:

Якщо  $A^{-1}=(u_{ij})$ ,  $AA^{-1}=(t_{ij})$ , то згідно з правилом множення матриць  $t_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{A_{jk}}{|A|}$ ; в силу властивостей 5.12, 5.13,  $t_{ij}=1$ , якщо  $i=j$ , і  $t_{ij}=0$ , якщо  $i \neq j$ . Отже  $AA^{-1}=E$ .

## Лінійні оператори

Нехай  $U$  - скінченномірний простір над деяким полем  $F$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 6.1

Лінійним оператором, визначеним на просторі  $U$ , називається відображення  $\varphi$  простору  $U$  на себе, що задовольняє умовам:

1. Для будь-яких векторів  $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in U$ ,  $\varphi(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = \varphi(\bar{a}_1) + \varphi(\bar{a}_2)$ ;

2. Для будь-якого  $\bar{a} \in U$  і будь-якого  $\lambda \in F$ ,  $\varphi(\lambda \bar{a}) = \lambda \varphi(\bar{a})$ .

### ПРИКЛАДИ.

1) Нехай  $U$  - довільний векторний простір над полем  $F$  і  $\bar{a} \in F$ . Нехай  $\varphi(\bar{u}) = \alpha \bar{u}$  для будь-якого  $\bar{u} \in U$ . Очевидно  $\varphi$  - лінійний оператор, який діє в просторі  $U$ .

2) Нехай  $U$  - множина многочленів степеня не вищого за  $n$  над полем дійсних чисел  $R$ . Нехай  $\varphi(f(x)) = f'(x)$ , де  $f(x) \in U$ . З властивостей дії диференціювання випливає, що  $\varphi$  - лінійний оператор, який діє в просторі  $U$ .

### Найпростіші властивості лінійних операторів.

1) Якщо  $\varphi$  - лінійний оператор, який діє в просторі  $U$ , то  $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$ .

Дійсно,  $\varphi(\bar{0}) = \varphi(0\bar{a}) = 0\varphi(\bar{a}) = \bar{0}$ .

2)  $\varphi\left(\sum_{i=1}^k a_i \bar{u}_i\right) = \sum_{i=1}^k a_i \varphi(\bar{u}_i)$ .

Випливає безпосередньо з означення лінійного оператора. Властивість 2 означає, що дія лінійного оператора на просторі  $U$  однозначно визначається його дією на базисі простору. Більш того, справедлива така теорема.

### ТЕОРЕМА 6.1

Нехай  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  - базис векторного простору  $U$  над полем  $F$  і  $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$  - довільна система векторів цього простору. Тоді існує єдиний лінійний оператор  $\varphi$  простору  $U$ , для якого має місце рівність:  $\varphi(\bar{e}_i) = \bar{u}_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ .

### Доведення:

Нехай  $\bar{x} \in U$ ,  $\bar{x}$  - довільний вектор. Тоді  $\bar{x} = \sum_{i=1}^k a_i \bar{e}_i$ , покладемо  $\varphi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^k a_i \bar{u}_i$ .

Безпосередньо перевіряється, що відображення  $\varphi$  векторного простору  $U$  в себе задовольняє умовам 1 і 2 означення лінійного оператора, причому  $\varphi(\bar{e}_i) = \bar{u}_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . Отже,  $\varphi$  - лінійний оператор, який діє в просторі  $U$ . Оператор  $U$  із заданими властивостями єдиний, що очевидно.

### ОЗНАЧЕННЯ 6.2

Ядром лінійного оператора  $\varphi$ , який діє в просторі  $U$ , називається множина всіх векторів з  $U$ , кожен з яких оператором  $\varphi$  відображається в нульовий вектор.

### ТЕОРЕМА 6.2

Ядро лінійного оператора  $\varphi$ , який діє в просторі  $U$  над полем  $F$ , є підпростором простору  $U$ .

#### Доведення:

Нехай  $V$  - ядро лінійного оператора  $\varphi$ . В силу властивості 1,  $\bar{0} \in V$ , тобто  $V$  - непорожня множина. Якщо  $\bar{u}_1 \in V$ ,  $\bar{u}_2 \in V$ ,  $\alpha \in F$ , то  $\varphi(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = \varphi(\bar{u}_1) + \varphi(\bar{u}_2) = \bar{0}$ ;  $\varphi(\alpha \bar{u}_1) = \alpha \varphi(\bar{u}_1) = \alpha \bar{0} = \bar{0}$ . Згідно з теоремою 2.2,  $V$  - підпростір простору  $U$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 6.3.

Дефектом лінійного оператора називається розмірність ядра цього оператора.

### ОЗНАЧЕННЯ 6.4.

Образом лінійного оператора  $\varphi$ , який діє в просторі  $U$  над полем  $F$ , називається множина  $S$  векторів  $\bar{u} \in U$ , таких, що  $\bar{u} = \varphi(\bar{a})$ , для деякого  $\bar{a} \in U$ .

Образ лінійного оператора  $\varphi$  будемо позначати через  $\text{Im } \varphi = \{ \varphi(\bar{u}) | \bar{u} \in U \}$ .

### ТЕОРЕМА 6.3.

Образ лінійного оператора  $\varphi$ , який діє в просторі  $U$  над полем  $F$ , є підпростором простору  $U$ .

#### Доведення:

В силу властивості 6.1  $\bar{0} \in \text{Im } \varphi$ , тому  $\text{Im } \varphi$  - непорожнє. Нехай  $\bar{u}_1 \in \text{Im } \varphi$ ,  $\bar{u}_2 \in \text{Im } \varphi$ ,  $\lambda \in F$ . За означенням образу лінійного оператора  $\varphi$ , в просторі  $U$  існують такі вектори  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ , що  $\bar{u}_i = \varphi(\bar{v}_i)$ ,  $i=1, 2$ . Тоді  $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = \varphi(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) \in \text{Im } \varphi$ ,  $\lambda \bar{u}_1 = \lambda \varphi(\bar{v}_1) = \varphi(\lambda \bar{v}_1) \in \text{Im } \varphi$ . В силу теореми 2.2,  $\text{Im } \varphi$  є підпростором простору  $U$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 6.5.

Розмірність образу лінійного оператора  $\varphi$ , який діє на просторі  $U$ , називається рангом оператора  $\varphi$ .

### ТЕОРЕМА 6.4.

Сума рангу і дефекту лінійного оператора  $\varphi$ , який діє на просторі  $U$  над полем  $F$ , дорівнює розмірності простору  $U$ .

Доведення:

Нехай  $V$  - ядро лінійного оператора  $\varphi$  і  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m\}$  - базис простору  $V$ ; тут  $m$  - дефект лінійного оператора  $\varphi$ ,  $m \leq n$ , де  $n$  - розмірність простору  $U$ . В силу наслідку 2.4, базис підпростору  $U$  можна доповнити до базису всього простору  $U$ ; нехай  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_{n-m}\}$  - базис простору  $U$ . Нехай  $\bar{g}_i = \varphi(\bar{f}_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, n-m$ , і доведемо, що  $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_{n-m}\}$  - базис підпростору  $\text{Im } \varphi$ . Нехай

$$\sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i \bar{g}_i = \bar{0}; \text{ тоді } \sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i \varphi(\bar{f}_i) = \bar{0}, \text{ або } \sum_{i=1}^{n-m} \varphi(\gamma_i \bar{f}_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i \bar{f}_i\right) = \bar{0}. \text{ Тому } \sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i \bar{f}_i \in V, \text{ а значить,}$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i \bar{f}_i = \sum_{j=1}^m \beta_j \bar{e}_j, \text{ або } \sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i \bar{f}_i + \sum_{j=1}^m (-\beta_j) \bar{e}_j = \bar{0}. \text{ Так як } \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_{n-m}\} - \text{ базис}$$

простору  $U$ , то всі коефіцієнти в отриманій лінійній комбінації дорівнюють нулю. Наприклад,  $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = \dots = \bar{\gamma}_{n-m} = 0$ . Тому система векторів  $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_{n-m}\}$  лінійно незалежна. Нехай  $\bar{u} \in \text{Im } \varphi$ .

$$\text{Тоді } \bar{u} = \varphi(\bar{v}), \text{ для деякого } \bar{v} \in U; \quad \bar{v} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \bar{e}_j + \sum_{i=1}^{n-m} \alpha_i \bar{f}_i. \quad \text{Тому}$$

$$\bar{u} = \varphi(\bar{v}) = \varphi\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \bar{e}_j + \sum_{i=1}^{n-m} \alpha_i \bar{f}_i\right) = \sum_{i=1}^{n-m} \alpha_i \bar{g}_i, \text{ так як } \varphi\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \bar{e}_j\right) = \bar{0}. \text{ Отже, } \{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_{n-m}\} -$$

максимальна лінійно незалежна система векторів  $\text{Im } \varphi$ . Тому ранг  $r$  оператора  $\varphi$  дорівнює  $n-m$ ;  $r=n-m$ .

Звідси  $r+m=n$ . Теорема доведена.

### ОЗНАЧЕННЯ 6.6.

Нехай  $\varphi_1, \varphi_2$  - лінійні оператори, що діють в просторі  $U$  над полем  $F$ . Сумою  $\varphi_1 + \varphi_2$ , різницею  $\varphi_1 - \varphi_2$ , добутком  $\lambda \varphi_1$  на скаляр  $\lambda$  оператора  $\varphi_1$  і добутком  $\varphi_1 \varphi_2$  операторів  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  називаються відображення простору  $U$  в себе, визначені відповідно за формулами: для будь-якого  $\bar{u} \in U$ ,  $(\varphi_1 + \varphi_2)(\bar{u}) = \varphi_1(\bar{u}) + \varphi_2(\bar{u})$ ;  $(\varphi_1 - \varphi_2)(\bar{u}) = \varphi_1(\bar{u}) - \varphi_2(\bar{u})$ ;  $(\lambda \varphi_1)(\bar{u}) = \lambda \varphi_1(\bar{u})$ ;  $(\varphi_1 \varphi_2)(\bar{u}) = \varphi_1(\varphi_2(\bar{u}))$ .

### ТЕОРЕМА 6.5.

Всі відображення, задані в означенні 6.6, є лінійними операторами, які діють в просторі  $U$  над полем  $F$ .

Доведення:

Доведемо теорему, наприклад, для відображення  $\varphi_1 \varphi_2$ .

$$\begin{aligned} 1) \text{ Нехай } \lambda \in F, \bar{u}_1, \bar{u}_2 \in U. \text{ Тоді } (\varphi_1 \varphi_2)(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) &= \varphi_1(\varphi_2(\bar{u}_1 + \bar{u}_2)) = \varphi_1(\varphi_2(\bar{u}_1) + \varphi_2(\bar{u}_2)) = \\ &= \varphi_1(\varphi_2(\bar{u}_1)) + \varphi_1(\varphi_2(\bar{u}_2)) = (\varphi_1 \varphi_2)(\bar{u}_1) + (\varphi_1 \varphi_2)(\bar{u}_2). \end{aligned}$$

$$2) \quad \varphi_1 \varphi_2 (\lambda \bar{u}_1) = \varphi_1 (\varphi_2 (\lambda \bar{u}_1)) = \varphi_1 (\lambda \varphi_2 (\bar{u}_1)) = \lambda \varphi_1 (\varphi_2 (\bar{u}_1)) = \lambda (\varphi_1 \varphi_2) (\bar{u}_1).$$

Тому  $\varphi_1 \varphi_2$  - лінійний оператор, який діє в просторі U над полем F.

### ОЗНАЧЕННЯ 6.7.

Нехай  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  базис лінійного простору U,  $\varphi$  - лінійний оператор, який діє у цьому

$$\text{просторі, і } \varphi(\bar{e}_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \bar{e}_i, j=1, 2, \dots, n.$$

$$\text{Матриця } A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ називається матрицею лінійного оператора } \varphi, \text{ що діє в}$$

просторі U, в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ . З означення матриці лінійного оператора  $\varphi$  в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  випливає, що стовпці цієї матриці є коефіцієнтами розкладу векторів  $\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n)$  за базисом  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ .

### ТЕОРЕМА 6.6.

Якщо  $A_i$  - матриця лінійного оператора  $\varphi$ ,  $i=1, 2$ , який діє в просторі U, в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ , то матрицями лінійних операторів  $\varphi_1 + \varphi_2$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2$ ,  $\lambda \varphi_1$ ,  $\varphi_1 \varphi_2$  будуть відповідно  $A_1 + A_2$ ,  $A_1 - A_2$ ,  $\lambda A_1$ ,  $A_1 A_2$ .

### Доведення:

Якщо  $A_1 = (\lambda_{ij})$  - матриця лінійного оператора  $\varphi$ , в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ , то  $\varphi(\bar{e}_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \bar{e}_i$ .

Символічно це будемо записувати так:  $(\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n)) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) A_1$ . Аналогічно,  $(\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n)) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) A_2$ . Тому  $((\varphi_1 + \varphi_2)(\bar{e}_1), (\varphi_1 + \varphi_2)(\bar{e}_2), \dots, (\varphi_1 + \varphi_2)(\bar{e}_n)) =$   
 $= (\varphi_1(\bar{e}_1) + \varphi_2(\bar{e}_1), \varphi_1(\bar{e}_2) + \varphi_2(\bar{e}_2), \dots, \varphi_1(\bar{e}_n) + \varphi_2(\bar{e}_n)) = (\varphi_1(\bar{e}_1), \varphi_1(\bar{e}_2), \dots, \varphi_1(\bar{e}_n)) + (\varphi_2(\bar{e}_1), \varphi_2(\bar{e}_2), \dots,$   
 $\varphi_2(\bar{e}_n)) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) A_1 + (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) A_2 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) (A_1 + A_2).$

Тут використані властивості дій над матрицями, які зберігаються для випадку, коли елементами матриці-рядка є вектори простору U. З отриманої в результаті рівності випливає, що  $A_1 + A_2$  буде матрицею лінійного оператора  $\varphi_1 + \varphi_2$ . Аналогічно доводиться теорема для операторів  $\varphi_1 - \varphi_2$  і  $\lambda \varphi_1$ . Розглянемо тепер оператор  $\varphi_1 \varphi_2$ . Якщо  $A_1 = (\lambda_{ij})$ ,  $A_2 = (\mu_{ij})$ , то

$$(\varphi_1 \varphi_2)(\bar{e}_k) = \varphi_1(\varphi_2(\bar{e}_k)) = \varphi_1\left(\sum_{j=1}^n \mu_{jk} \bar{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu_{jk} \varphi_1(\bar{e}_j) = \sum_{j=1}^n \mu_{jk} \sum_{i=1}^n \lambda_{ji} \bar{e}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_{jk} \lambda_{ji} \bar{e}_i =$$

$= \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n \mu_{ik} \lambda_{ji}) \bar{e}_i$ . Якщо  $B=(\beta_{ij})$  - матриця лінійного оператора  $\varphi_1 \varphi_2$ , то з отриманої рівності

випливає, що  $\beta_{jk} = \sum_{i=1}^n \mu_{ik} \lambda_{ji}$ , тобто  $B=A_1 A_2$  це випливає з означення добутку матриць.

Теорема доведена.

**Розв'яжемо тепер таку задачу:**

Нехай  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  - базис простору  $U$ , в якому діє лінійний оператор  $\varphi$ . Відомі координати вектора  $\bar{u}$  у цьому базисі. Треба знайти координати вектора  $\varphi(\bar{u})$  у вказаному базисі. Якщо  $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n)$  - координати вектора  $\bar{u}$  у вказаному базисі, то  $\bar{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{e}_i$ ; символічно це можна записати так:

$$\bar{u} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

З властивості 6.2 лінійних операторів випливає, що

$$\varphi(\bar{u}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(\bar{e}_i) = (\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n)) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

Нехай  $A$  - матриця оператора  $\varphi$  в цьому ж базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ . Тоді  $\varphi(\bar{u}) = (\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots,$

$$\varphi(\bar{e}_n)) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

Звідси випливає, що координатний стовпець вектора  $\varphi(\bar{u})$  в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  є добутком матриці оператора  $\varphi$  на координатний стовпець вектора  $\bar{u}$  в тому ж базисі.

**ТЕОРЕМА 6.7.**

Ранг лінійного оператора  $\varphi$ , який діє в просторі  $U$ , дорівнює рангу матриці цього оператора в довільному базисі простору  $U$ .

**Доведення:**

Нехай  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  - деякий базис простору  $U$ ,  $A$  - матриця оператора  $\varphi$  в цьому базисі. Очевидно  $\{\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n)\}$  - система твірних простору  $\text{Im } \varphi$ . Тому ранг оператора  $\varphi$  дорівнює рангу системи векторів  $\{\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n)\}$ . Нехай  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(\bar{e}_i) = \bar{0}$ ; тоді

$$(\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n)) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ або } (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Так як  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  - базис простору  $U$ , то

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Якщо  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  - система векторів-стовпців матриці  $A$ , то з отриманої рівності випливає, що  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{a}_i = \bar{0}$ . Очевидно, що з другого співвідношення випливає перше. За лемою 2.4 ранги систем  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  і  $\{\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n)\}$  рівні.

Теорема доведена.

#### ТЕОРЕМА 6.8.

Нехай  $U$  - векторний простір над полем  $F$ ,  $\varphi$  - лінійний оператор, який діє в просторі  $U$ . Наступні твердження еквівалентні:

1. Відображення  $\varphi$  - ін'єктивне;
2. Дефект оператора  $\varphi$  дорівнює нулю;
3. Ранг оператора  $\varphi$  дорівнює розмірності простору  $U$ ;
4. Відображення  $\varphi$  сюр'єктивне.

#### Доведення:

Якщо  $\varphi$  - ін'єктивне відображення, то ядро  $\varphi$  складається з одного нульового вектора. Тому дефект оператора  $\varphi$  дорівнює нулю. Отже, умова 1 тягне за собою умову 2. Якщо виконана умова 2, то в силу теореми 6.4 ранг оператора  $\varphi$  дорівнює розмірності простору  $U$ , тобто з 2 випливає 3. Якщо виконана умова 3, то  $\text{Im } \varphi \subset U$ , причому розмірності просторів рівні. Тому  $\text{Im } \varphi = U$ , і відображення  $\varphi$  - сюр'єктивне. Отже з 3 випливає 4. Нарешті, якщо 4 сюр'єктивне, то ранг оператора  $\varphi$  дорівнює розмірності простору  $U$ , а значить дефект  $\varphi$  дорівнює 0 і відображення  $\varphi$  ін'єктивне. Отже, з умови 4 випливає умова 1. Теорема доведена.

Вияснимо, нарешті, ще одне питання. Нехай  $A$  - матриця лінійного оператора  $\varphi$  в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ ,  $B$  - матриця цього ж оператора в базисі  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ . Як зв'язані між собою матриці  $A$  і  $B$ :

Нехай  $\bar{f}_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} \bar{e}_j$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . Якщо  $T=(\lambda_{ij})$ , то  $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)=(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)T$ . Крім того,  $\varphi(\bar{f}_i)=\sum_{j=1}^n \lambda_{ji} \varphi(\bar{e}_j)$ , а, значить,  $(\varphi(\bar{f}_1), \varphi(\bar{f}_2), \dots, \varphi(\bar{f}_n))=(\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n))T$ . Так як  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  - лінійно незалежна система векторів, то  $T$  - невироджена матриця, а, значить, має обернену матрицю. Тому  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)=(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)T^{-1}$ . Отже,  $(\varphi(\bar{f}_1), \varphi(\bar{f}_2), \dots, \varphi(\bar{f}_n))=(\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n))T=(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)AT=(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)T^{-1}AT=(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)B$ . Звідси  $(\bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{0})=(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)(T^{-1}AT-B)$ . Так як  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  - базис простору  $U$ , то  $T^{-1}AT=B$ . Матрицю  $T$  називають матрицею переходу від базису  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  до базису  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ . Матриця  $T^{-1}$  називається матрицею переходу від  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  до  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ .

#### ВИСНОВОК:

Матриця лінійного оператора  $\varphi$  в базисі  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  дорівнює добутку матриці переходу від базису  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  до базису  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  на матрицю оператора  $\varphi$  в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  і на матрицю переходу від  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  до  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ .

#### ОЗНАЧЕННЯ 6.8.

Нехай  $U$  - векторний простір над полем  $F$ ,  $\varphi$  - лінійний оператор, що діє в цьому просторі. Підпростір  $W \subset U$  називається  $\varphi$ -інваріантним, якщо  $\varphi(\bar{u}) \in W$ , для будь-якого  $\bar{u} \in W$ .

#### ЛЕМА 6.1.

Якщо  $W$  -  $\varphi$ -інваріантний підпростір простору  $U$  і  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  - такий базис простору  $U$ , що  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  - базис підпростору  $W$ , то матриця лінійного оператора  $\varphi$  у вказаному базисі простору  $U$  має клітинний вигляд:  $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ , де  $A$  - матриця обмеження оператора  $\varphi$  на  $W$  у базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ .

Лема очевидна.

Нехай  $U=W_1 \oplus W_2$ , і підпростори  $W_1$  і  $W_2$  -  $\varphi$ -інваріантні. Якщо  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  - базис  $W_1$ ,  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  - базис  $W_2$ , то  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  - базис простору  $U$ . Позначимо через  $B_i$  -



матрицю обмеження оператора  $\varphi$  в просторі  $W_i$ ,  $i=1, 2$ , в базисах  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  і  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  відповідно. Нехай  $A$  - матриця оператора  $\varphi$  в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ .

ЛЕМА 6.2.

Матриця  $A$  має клітинний вигляд: 
$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}.$$

# Системи лінійних рівнянь

## ОЗНАЧЕНИЯ 7.1

Системою лінійних рівнянь над полем  $F$  з змінними  $x_1, x_2, \dots, x_n$  називається система

$$\text{виду} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (7.1)$$

## ОЗНАЧЕНИЯ 7.2

Розв'язком системи лінійних рівнянь (7.1) називається вектор  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in F^n$ , координати якого задовольняють системі (7.1); тобто виконуються рівності:

$$a_{i1}\lambda_1 + a_{i2}\lambda_2 + \dots + a_{in}\lambda_n = b_i, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

### ОЗНАЧЕНИЯ 7.3

Система лінійних рівнянь називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок. Система лінійних рівнянь називається несумісною, якщо вона немає розв'язків.

### ОЗНАЧЕНИЯ 7.4

Дві системи лінійних рівнянь називаються рівносильними, якщо кожен розв'язок однієї з них є розв'язком іншої, і, навпаки.

Система лінійних рівнянь може бути записана в матричній формі:  $AX=B$ , (7.2), де

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Матриця  $A$  називається основною матрицею системи,  $X$  називається стовпцем невідомих, а  $B$  - стовпцем вільних членів.

Наряду з основною матрицею системи лінійних рівнянь  $A$  розглядають також розширену матрицю  $U$ , яку отримують з  $A$  додаванням стовпця вільних членів:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

За допомогою теорії матриць легко отримати критерій сумісності систем лінійних рівнянь.

ТЕОРЕМА 7.1 (Кронекера-Капеллі).

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці цієї системи дорівнював рангу її розширеної матриці.

Доведення:

*Необхідність.*

Нехай система лінійних рівнянь (7.1) сумісна. Якщо  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  її розв'язок, то

$\sum_{k=1}^n a_{ik} \gamma_k = b_i, i=1, 2, \dots, m$ . В матричній формі це можна записати у вигляді:

$$AG=B, \text{ де } G=\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix}$$

Отримане співвідношення означає, що стовпець вільних членів В лінійно виражається через стовпці матриці А. Оскільки всі стовпці матриці А є стовпцями матриці U, то системи векторів-стовпців матриці А і U еквівалентні. Отже, ранг основної матриці А дорівнює рангу розширеної матриці U.

*Достатність.*

Припустимо, що ранги матриць А і U рівні. Це означає, що максимальна лінійно незалежна система векторів-стовпців матриці А є такою ж і для матриці U. Тому стовпець вільних членів В є лінійною комбінацією стовпців матриці А. Отже, існують такі числа

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \text{ що } A \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix} = B$$

Таким чином, вектор  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in F^n$  є розв'язком системи лінійних рівнянь (7.1). отже, вказана система сумісна.

Теорема доведена.

Перш, ніж приступити до вивчення системи лінійних рівнянь (7.1), розглянемо спочатку її частинний випадок, коли  $m=n$ , і матриця А не вироджена. З не виродженості матриці А випливає, що її ранг дорівнює n, тому ранг розширеної матриці U також дорівнює n, і дана система сумісна, в силу теореми Кронекера-Капеллі. Помножимо рівність (7.2) зліва на матрицю  $A^{-1}$ :  $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ , або  $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$ ; тобто  $X = A^{-1}B$ . з цієї рівності випливає, що система лінійних рівностей має єдиний розв'язок. За властивостю визначників 5.13,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1T} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2T} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{T1} & A_{T2} & \dots & A_{TT} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} C_A, \text{ де } C_A = (A_{ij}).$$

тому  $X = -\frac{1}{|A|} C_A B = -\frac{|B_i|}{|A|}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , де  $B_i$  - матриця, отримана з  $A$  заміною стовпця коефіцієнтів при змінній  $i$  на стовець вільних членів  $B$  (див. властивість 5.11 с) визначників). Отже, якщо в системі (7.1)  $m=n$ , і основна матриця не вироджена, то система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок, який записується у вигляді формул

$$x_i = -\frac{|B_i|}{|A|}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (7.3).$$

Формули (7.3) називаються формулами Крамера.

Ці формули незручні для практичного розв'язку системи лінійних рівнянь і мають чисто теоретичний інтерес. На практиці для знаходження розв'язку систем лінійних рівнянь використовується метод виключення змінних, який називають методом Гаусса. Цей метод заключається в наступному: якщо  $a_{11} \neq 0$ , то множимо 1-е рівняння системи на  $-a_{11}^{-1}a_{21}$  і додаємо отриману рівність до другої. В перетвореній другій рівності буде відсутня змінна  $x_1$ . Якщо застосувати такий спосіб для виключення змінної  $x_1$  з 3, 4 і т.д. рівнянь, то отримаємо нову систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots \\ a'_{n2}x_2 + \dots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases} \quad (7.4)$$

В матричному вигляді виключення змінної  $x_1$  з 2-го рівняння можна реалізувати множенням рівності (7.2) зліва на елементарну матрицю  $F_{21}(-a_{11}^{-1}a_{21})$ . Якщо  $a_{11} = 0$ , то можна переставити рівняння, взявши за першу рівність ту, в якій коефіцієнт при  $x_1$  не дорівнює нулю.

#### ЛЕМА 7.1.

Система (7.1) рівносильна системі (7.4).

#### Доведення:

Нехай  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  - розв'язок системи (7.1). Тоді

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = B \quad (7.5)$$

Систему (7.4) запишемо у матричному виді:  $A'=WA$ ,  $B'=WB$ ,  $W$  - добуток елементарних матриць виду  $F_{ij}(-a_{ii}^{-1}a_{ji})$ . З рівності (7.5) отримаємо  $(BA)'=BB$ , або  $A'=B'$ .

$$(WA) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = WB, \text{ або } A' \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = B'$$

Таким чином,  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  - розв'язок системи (7.4), тобто довільний розв'язок системи (7.1), є розв'язком системи (7.4). З іншої сторони матриця  $W$  - має обернену, тому  $A=W^{-1}A'$ ;  $B=W^{-1}B'$ . Міркуючи аналогічно можна показати, що будь-який розв'язок системи (7.4) є розв'язком системи (7.1). Отже, ці системи рівносильні.

Лема доведена.

Тепер виясимо зміст застосування методу Гаусса. Щоб розв'язати систему (7.1), знайдемо розв'язок рівносильної системи (7.4). Для розв'язку останньої достатньо розв'язати систему від  $(n-1)$  змінної, отриману в результаті вилучення 1-ї рівності з системи (7.1), а потім знайти з цього рівняння  $x_1$ . Таким чином, за допомогою методу Гаусса розв'язок системи лінійних рівнянь від  $n$  змінних зводиться до розв'язку тієї ж системи від  $(n-1)$  змінної. Перейдемо до загального випадку системи лінійних рівнянь (7.1), тобто до випадку, коли  $m$  і  $n$  - довільні.

### ОЗНАЧЕННЯ 7.5

Система лінійних рівнянь (7.1) називається однорідною, якщо всі  $b_i=0$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ . Однорідна система завжди сумісна. Її розв'язком завжди служить нульовий вектор простору  $F^n$ . Нульовий вектор з  $F^n$  називають нульовим розв'язком однорідної системи лінійних рівнянь.

### ТЕОРЕМА 7.2.

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь від  $n$  змінних є підпростором лінійного простору  $F$ .

Доведення:

Нехай  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  - два розв'язки системи лінійних однорідних рівнянь з основною матрицею  $A=(a_{ij}), i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$ . За означенням розв'язку маємо:

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ і } A \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \lambda_2 + \mu_2 \\ \dots \\ \lambda_k + \mu_k \end{bmatrix} = A \left[ \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_k \end{bmatrix} \right] = A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, сума двох розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь знову буде розв'язком цієї системи. Аналогічно доводиться, що добуток вектора-розв'язку  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  на скаляр  $\gamma \in F$  також буде розв'язком даної однорідної системи лінійних рівнянь. В силу теореми 2.2 множина всіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь від  $n$  змінних є підпростором простору  $F$ .

Теорема доведена.

### ТЕОРЕМА 7.3.

Розмірність простору розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь дорівнює  $n-r$ , де  $n$  - число змінних, а  $r$  - ранг основної матриці системи.

Доведення:

Нехай  $A$  - основна матриця системи однорідних лінійних рівнянь,  $r$  - її ранг. Якщо  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  - розв'язок системи (7.1), то має місце рівність:

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Нехай  $\{\bar{e}_1=(1,0,0,\dots,0), \bar{e}_2=(0,1,0,\dots,0), \dots, \bar{e}_n=(0,0,0,\dots,1)\}$  - базис векторного простору  $F^n$  і  $\varphi$  - лінійний оператор, що діє в цьому просторі, причому матриця оператора  $\varphi$  у вказаному базисі дорівнює  $A$ . Із співвідношення (7.6) випливає, що кожен розв'язок системи лінійних рівнянь (7.1) належить ядру оператора  $\varphi$ . За теоремою 6.7 ранг лінійного оператора  $\varphi$  дорівнює рангу матриці  $A$ , тобто дорівнює  $r$ . З іншої сторони, за теоремою 6.4, дефект

оператора  $\varphi$  дорівнює  $n-r$ . Твердження даної теореми випливає з того, що дефект оператора  $\varphi$  дорівнює розмірності простору розв'язків системи (7.1).

### ОЗНАЧЕННЯ 7.6

Фундаментальною системою розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь називається базис простору розв'язків цієї системи.

З попередньої теореми випливає, що фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь містить  $n-r$  розв'язків, де  $n$  - число змінних, а  $r$  - ранг основної матриці системи. Заданням фундаментальної системи розв'язків визначено практично весь простір розв'язків. Тому задача знаходження множини всіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь зводиться до знаходження фундаментальної системи розв'язків. Опишемо коротко процес знаходження фундаментальної системи розв'язків однорідної системи  $AX=0$ , в якій ранг  $A$  дорівнює  $r$ .

- 1) Приводимо матрицю  $A$  до ступінчатого вигляду множенням її зліва на матрицю  $U$ , яка має обернену матрицю.  $UAX=U0$ ;  $(UA)X=0$ .
- 2) Матриця  $UA$  містить  $r$  нульових рядків. Отже, система  $(UA)X=0$  фактично містить  $r$  рівнянь. Крім того, вона рівносильна даній системі  $AX=0$ .
- 3) Матриця  $UA$  містить мінор  $r$ -го порядку, відмінний від нуля. Залишимо в лівих частинах рівнянь системи  $(UA)X=0$  тільки ті змінні, коефіцієнти при яких входять у вибраний мінор  $r$ -го порядку, який не дорівнює нулю. Інші  $(n-r)$  змінних перенесемо у праві частини рівнянь, назвемо ці змінні вільними.
- 4) В отриманій системі будемо давати  $(n-r)$  вільним змінним довільні значення. Так як матриця, що складається з коефіцієнтів при  $r$  змінних в лівій частині, є квадратною і не виродженою, то для будь-яких значень вільних змінних перетворена система має єдиний розв'язок.
- 5) Фундаментальну систему розв'язків будемо наступним чином: надаючи першій з вільних змінних значення 1, а іншим - нульові значення, отримаємо перший фундаментальний розв'язок; потім розв'язок 1 надаємо другій вільній змінній, а іншим нульові значення; це буде другий фундаментальний розв'язок і т.д. Так як вільних змінних  $(n-r)$  штук, то описаним способом отримаємо  $(n-r)$  розв'язків. Лінійна залежність отриманої системи розв'язків легко можна встановити.

Нехай тепер задана неоднорідна система лінійних рівнянь  $AX=B$  (7.6). Системі (7.1) поставимо у відповідність однорідну систему лінійних рівнянь  $AX=0$  (7.7).

### ТЕОРЕМА 7.4.

Нехай  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  - два розв'язки системи (7.1). Тоді  $(\lambda_1 - \mu_1, \lambda_2 - \mu_2, \dots, \lambda_n - \mu_n)$  буде розв'язком однорідної системи (7.7).

Доведення:

За означенням розв'язку лінійних рівнянь,

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = B, \text{ і } A \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_k \end{bmatrix} = B, \text{ тоді}$$

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 - \mu_1 \\ \lambda_2 - \mu_2 \\ \dots \\ \lambda_k - \mu_k \end{bmatrix} = A \left[ \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_k \end{bmatrix} \right] = A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_k \end{bmatrix} = B - B = 0$$

що і потрібно було довести.

ТЕОРЕМА 7.5.

Якщо  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  розв'язок системи (7.1), а  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  - розв'язок системи (7.7), то  $(\lambda_1 + \gamma_1, \lambda_2 + \gamma_2, \dots, \lambda_n + \gamma_n)$  буде розв'язком однорідної системи (7.7).

Доводиться так само, як і попередня теорема.

З останніх двох теорем випливає, що будь-який розв'язок системи лінійних рівнянь (7.1) може бути отриманий як сума деякого фіксованого розв'язку цієї системи і довільного розв'язку відповідної однорідної системи (7.7). Таким чином, множина розв'язків неоднорідної системи (7.1) є лінійним многовидом.



## Власні значення і власні вектори лінійного оператора

В розділі "Лінійні оператори" був встановлений зв'язок між матрицями одного і того ж лінійного оператора, який діє в просторі  $U$  над полем  $F$ , в різних базисах. В зв'язку з цим виникає задача знаходження базису векторного простору  $U$ , в якому матриця лінійного оператора  $\varphi$  мала б найбільш простий вид. В розв'язу поставленої задачі грає велику роль поняття власного вектора.

### ОЗНАЧЕННЯ 8.1.

Скаляр  $\lambda \in F$  називається власним значенням лінійного оператора  $\varphi$ , який діє у векторному просторі  $U$  над полем  $F$ , якщо в просторі  $U$  існує такий ненульовий вектор  $\bar{u}$ , що  $\varphi(\bar{u}) = \lambda \bar{u}$ . В цьому випадку вектор  $\bar{u}$  називається власним вектором лінійного оператора  $\varphi$ , який належить власному значенню  $\lambda$ .

Відмітимо, що власний вектор лінійного оператора  $\varphi$  - це ненульовий вектор. Для знаходження власних векторів лінійного оператора  $\varphi$  задамо на просторі  $U$  будь-який базис  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Нехай  $\bar{u} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  - власний вектор оператора  $\varphi$ , який належить власному значенню  $\lambda$ ;  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  - координати вектора  $\bar{u}$  у вибраному базисі. Тоді  $\varphi(\bar{u}) = \lambda \bar{u} = (\lambda \gamma_1, \lambda \gamma_2, \dots, \lambda \gamma_n)$ . Якщо  $A$  - матриця лінійного оператора  $\varphi$  у вказаному базисі, то

$$\begin{bmatrix} \lambda \gamma_1 \\ \lambda \gamma_2 \\ \dots \\ \lambda \gamma_k \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix}, \text{ або } \lambda E \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix}, (\lambda E - A) \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Оскільки вектор  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = \bar{u} \neq \bar{0}$ , то ранг матриці  $(\lambda E - A)$  менше ніж  $n$ , то визначник квадратної матриці  $(\lambda E - A)$  дорівнює нулю. Нехай  $x$  - змінна. Розглянемо матрицю  $(xE - A)$ . З властивості 5.11, 5.12, визначником  $|xE - A|$  є многочлен степені  $n$  від змінної  $x$ ;  $f(x) = |xE - A|$ . Отже власне значення  $\lambda$  оператора  $\varphi$  є коренем рівності  $f(x) = 0$ . Якщо  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  - другий базис простору  $U$  і  $T$  - матриця переходу від базису  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  до базису  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ , то матриця лінійного оператора  $\varphi$  в базисі  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  дорівнює  $T^{-1}AT$ . Тому  $xE - T^{-1}AT = T^{-1}(xE)T - T^{-1}AT = T^{-1}(xE - A)T$ , так як скалярна матриця  $xE$  перестановочна з будь-якою матрицею; отже,  $|xE - T^{-1}AT| = |T^{-1}(xE - A)T| = |T^{-1}| |xE - A| |T| = |xE - A| = f(x)$ . Тут ми скористались правилом обчислення визначника добутку матриць. Отже,

ми отримали, що многочлен  $f(x) = |xE-A|$ , де  $A$  - матриця оператора  $\varphi$  в заданому базисі, не залежить від вибору базису.

### ОЗНАЧЕННЯ 8.2.

Нехай  $\varphi$  - лінійний оператор, що діє в просторі  $U$  над полем  $F$  і  $A$  - матриця цього оператора в довільно вибраному базисі. Многочлен  $f(x) = |xE-A|$  називається характеристичним многочленом лінійного оператора  $\varphi$ , а рівняння  $f(x)=0$  називається характеристичним рівнянням цього оператора.

З наведених вище міркувань випливає, що власні значення лінійного оператора  $\varphi$  є корнями його характеристичного рівняння. По цій причині їх називають ще характеристичними числами лінійного оператора  $\varphi$ . Отже, для відшукування координат власних векторів лінійного оператора  $\varphi$  в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  простору  $U$  потрібно:

1. Скласти характеристичне рівняння  $f(x)=0$  лінійного оператора  $\varphi$ ;
2. Знайти корні характеристичного рівняння, яке належить полю  $F$ ; це будуть власні значення лінійного оператора  $\varphi$ ;
3. Для кожного власного значення  $\lambda_0$  оператора  $\varphi$  знаходимо координати власних векторів цього оператора, які належать власному значенню  $\lambda_0$ ; для цього потрібно розв'язати систему рівнянь (8.1)

$$(\lambda_0 E - A) \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

де  $A$  - матриця лінійного оператора  $\varphi$  у вибраному базисі,  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  - координатний рядок власного вектора в цьому базисі. Так як ранг матриці  $\lambda_0 E - A$  менше ніж  $n$ , то система (8.1) має ненульовий розв'язок. Фактично достатньо знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь (8.1).

## **Жорданова форма матриці**

---

Припустимо тепер до побудови найбільш простої форми матриці лінійного оператора  $\varphi$ , який діє у векторному просторі  $U$  над полем  $F$ . Припустимо, що всі корні характеристичного рівняння лінійного оператора  $\varphi$  належать полю  $F$ .

### ТЕОРЕМА 9.1 (Гамільтона-Келі).

Якщо  $f(x)$  - характеристичний многочлен лінійного оператора  $\varphi$ , то  $f(\varphi)=0$ .

#### Зауваження 1.

Так як в розділі "Лінійні оператори" були визначені сума, різниця, добуток лінійних операторів (а значить і натуральні степені даного лінійного оператора) і добуток лінійного оператора на скаляр, то значення многочлена від лінійного оператора визначене. Крім того, з властивості асоціативності множення відображень випливає, що  $\varphi^k \varphi^m = \varphi^m \varphi^k = \varphi^{m+k}$ . Тому для будь-яких многочленів  $f(x)$  і  $g(x)$  над полем  $F$ ,  $f(x)g(x) = g(x)f(x)$ .

#### Зауваження 2.

Теорема Гамільтона-Келі справедлива і в тому випадку, коли не всі корні характеристичного многочлена оператора  $\varphi$  належать полю  $F$ . Наведене нижче доведення для цього випадку повинно бути модифіцироване наступним чином: поле  $F$  треба розширити до поля  $K$ , приєднавши до нього всі власні значення лінійного оператора  $\varphi$ , вважати, що оператор  $\varphi$  діє на векторному просторі  $W$  над полем  $K$ , базис якого співпадає з базисом даного векторного простору  $V$ , скориставшись тим, що  $f(\varphi)$  як оператор, що діє на просторі  $W$ , дорівнює 0, а значить,  $f(\varphi)=0$  в просторі  $V$ , елементи якого утворюють підмножину множини  $W$ .

#### Доведення:

Будемо доводити теорему індукцією по розмірності простору  $U$ . Якщо розмірність  $U$  дорівнює 1, то базис простору  $U$  складається з одного вектора  $\bar{a}$ . Тому характеристичний многочлен  $f(\varphi)$  оператора  $\varphi$  в цьому випадку дорівнює  $x - \lambda$ ;  $f(x) = x - \lambda$ . Отже,  $f(\varphi) = \varphi - \lambda$ ;  $f(\varphi)(\bar{a}) = (\varphi - \lambda)(\bar{a}) = \varphi(\bar{a}) - \lambda \bar{a} = \lambda \bar{a} - \lambda \bar{a} = \bar{0}$ . Так як лінійний оператор  $f(\varphi)$  переводить в нульовий вектор базисний вектор  $\bar{a}$ , то  $f(\varphi)=0$ . Для  $n=1$  теорема справедлива.

Припустимо, що теорема справедлива для оператора, який діє в просторі розмірності  $n$ . Нехай тепер лінійний оператор  $\varphi$  діє в просторі  $U$ , розмірність якого  $(n+1)$  над полем  $F$ .

Нехай  $\lambda_0$  - будь-який корінь характеристичного многочлена оператора  $\varphi$ . За умовою  $\lambda_0 \in F$ . Як видно з попереднього розділу, в  $U$  існує власний вектор  $\bar{a}$ , що належить власному значенню  $\lambda_0$ ;  $\varphi(\bar{a}) = \lambda_0 \bar{a}$ . Нехай  $f(x)$  - характеристичний многочлен лінійного оператора  $\varphi$ . Тоді  $f(x) = (x - \lambda_0)g(x)$ , де  $g(x)$  - многочлен степені  $n$ . Припустимо, що  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n, \bar{a}\}$  - базис простору  $U$ , що містить в собі власний вектор  $\bar{a}$ . В силу леми 6.1, матриця оператора  $\varphi$  має в цьому базисі вид:

$$A = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & B & \dots \\ & & 0 \\ \mu_1 & \dots & \mu_n & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

Тоді

$$f(x) = |xE - A| = \begin{vmatrix} & & 0 \\ & xE - B & \dots \\ & & 0 \\ -\mu_1 & \dots & -\mu_n & \lambda_0 \end{vmatrix} = (x - \lambda_0)|xE - B|$$

згідно властивості 5.11 визначників. З іншої сторони,  $f(x) = (x - \lambda_0)g(x)$ ; тому  $g(x) = |xE - B|$ . Нехай  $V = L(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , позначимо через  $\varphi_1$  лінійний оператор, який діє в просторі  $V$ , і в базисі  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  має матрицю  $B$ . За припущенням індукції,  $g(\varphi_1) = 0$ , так як  $g(x) = |xE - B|$  - характеристичний многочлен оператора  $\varphi_1$ . В силу теореми 6.5 матриця оператора  $g(\varphi_1)$  в базисі  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  дорівнює  $g(B) = 0$ . Звідси і з правила дії над клітинними матрицями отримаємо:

$$g(A) = \begin{bmatrix} & 0 \\ g(B) & \dots \\ & 0 \\ v_1 & \dots & v_n & v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & \dots \\ & 0 \\ v_1 & \dots & v_n & v_{n+1} \end{bmatrix}$$

Таким чином,  $g(\varphi)(\bar{e}_i) = v_i \bar{a}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ; тому  $f(\varphi)(\bar{e}_i) = (\varphi - \lambda_0)g(\varphi)(\bar{e}_i) = (\varphi - \lambda_0)(v_i \bar{a}) = v_i(\varphi(\bar{a}) - \lambda_0 \bar{a}) = v_i(\lambda_0 \bar{a} - \lambda_0 \bar{a}) = \bar{0}$ . Крім того, очевидно  $f(\varphi)(\bar{a}) = g(\varphi)(\varphi - \lambda_0)(\bar{a}) = \bar{0}$ . Отже,  $f(\varphi)$  всі базисні вектори простору  $U$  відображає в нульовий вектор, тобто  $f(\varphi) = 0$ . Допущення індукції виправдане.

Теорема доведена.

Так як всі корні характеристичного многочлена лінійного оператора  $\varphi$  належать полю  $F$ , то  $f(x) = (x - \lambda_1)^{s_1} (x - \lambda_2)^{s_2} \dots (x - \lambda_k)^{s_k}$ ,  $\sum_{i=1}^k s_i = n$ .

ОЗНАЧЕННЯ 9.1.

Нехай  $\lambda_0$  - корень характеристичного многочлена  $f(x)$  лінійного оператора  $\varphi$ ,  $\lambda_0 \in F$ . Корневим підпростором лінійного оператора  $\varphi$ , що відповідає корню  $\lambda_0$ , називається множина  $V$  всіх векторів  $\bar{a} \in U$  таких, що  $(\varphi - \lambda_0)^k (\bar{a}) = \bar{0}$  для деякого натурального числа  $k$ .

Множина  $V$  є підпростором векторного простору  $U$ , що неважко довести за допомогою теореми 2.2, це оправдовує термін корневий підпростір.

ЛЕМА 9.1.

Якщо  $\varphi$  - лінійний оператор, що діє в просторі  $U$  і  $h(x)$  - довільний многочлен, то  $\text{Im}(h(\varphi))$  є  $\varphi$ -інваріантним підпростором простору  $U$ .

Доведення:

Нехай  $\bar{u} \in \text{Im}(h(\varphi))$ ; тоді  $\bar{u} = h(\varphi)(\bar{v})$ ,  $\bar{v} \in U$ . Тому  $\varphi(\bar{u}) = \varphi(h(\varphi)(\bar{v})) = h(\varphi) \varphi(\bar{v}) \in \text{Im } \varphi$ , що і потрібно було довести.

ЛЕМА 9.2.

Корневі підпростори лінійного оператора  $\varphi$  є  $\varphi$ -інваріантними підпросторами.

Доведення:

Нехай  $V$  - корневий підпростір лінійного оператора  $\varphi$ , відповідного корню  $\lambda_0$  характеристичного многочлена  $f(x)$  оператора  $\varphi$ . Якщо,  $\bar{u} \in V$  то  $(\varphi - \lambda_0 E)^m (\varphi(\bar{u})) = \varphi((\varphi - \lambda_0 E)^m (\bar{u})) = \bar{0}$ , тобто  $\varphi(\bar{u}) \in V$ , що і потрібно було довести.

Нехай  $V_i$  - корневий підпростір лінійного оператора  $\varphi$ , що відповідає власному значенню  $\lambda_i$ .

ТЕОРЕМА 9.2.

Векторний простір  $U$  над полем  $F$ , в якому діє лінійний оператор  $\varphi$ , розкладається на пряму суму корневих підпросторів оператора  $\varphi$ .

Доведення:

Нехай  $f(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{S_i}$  - характеристичний многочлен лінійного оператора  $\varphi$ .

Будемо доводити теорему індукцією по числу  $k$  різних корней многочлена  $f(x)$ . Якщо  $k=1$ , то в силу теореми Гамільтона-Келі, весь простір  $U$  є корневим підпростором, відповідним єдиному корню  $f(x)$ . Тому  $U$  є прямою сумою одного доданку. Припустимо, що теорема справедлива для значення  $k \geq 1$ .

Доведемо її справедливість для випадку, коли число власних значень дорівнює  $k+1$ . Нехай  $f(x) = (x - \lambda_1)^{S_1} (x - \lambda_2)^{S_2} \dots (x - \lambda_k)^{S_k} (x - \lambda_{k+1})^{S_{k+1}}$ ; позначимо через  $g(x)$  - многочлен  $(x - \lambda_1)^{S_1} (x - \lambda_2)^{S_2} \dots (x - \lambda_k)^{S_k}$ , а через  $h(x)$  - многочлен  $(x - \lambda_{k+1})^{S_{k+1}}$ . Тоді  $f(x) = g(x)h(x)$ ; в силу теореми Гамільтона-Келі  $f(\varphi) = 0$ , тобто  $g(\varphi)h(\varphi) = 0$  (9.1).

З іншої сторони  $g(x)$  і  $h(x)$  - взаємно прості многочлени. Тому існують многочлени  $p(x)$  і  $r(x)$  такі, що  $p(x)g(x) + h(x)r(x) \equiv 1$ . Підставляючи в цю тотожність оператор  $\varphi$  замість  $x$  отримаємо:  $p(\varphi)g(\varphi) + h(\varphi)r(\varphi) \equiv e$  (9.2), де  $e$  - тотожний оператор, що діє в просторі  $U$ . Нехай  $V = \{g(\varphi)(\bar{u}) \mid \bar{u} \in U\}$ ,  $W = \{h(\varphi)(\bar{u}) \mid \bar{u} \in U\}$ . Так як  $V$  і  $W$  образи лінійних операторів  $h(x)$  і  $g(x)$ , то за теоремою 6.2,  $V$  і  $W$  - підпростори  $U$ . Доведемо, що  $V \cup W = \{0\}$  (див. (9.1)). Дійсно,  $\bar{x} = e\bar{x} = p(\varphi)g(\varphi)\bar{x} + h(\varphi)r(\varphi)\bar{x} = p(\varphi)(\bar{0}) + r(\varphi)(\bar{0}) = \bar{0}$ . Отже,  $\bar{x} = \bar{0}$  і  $U \cap W = \{0\}$ . Крім того,  $\bar{x} = e\bar{x} = p(\varphi)(g(\varphi)\bar{x}) + r(\varphi)(h(\varphi)\bar{x}) = p(\varphi)\bar{v} + r(\varphi)\bar{w}$ ,  $\bar{v} \in V$ ,  $\bar{w} \in W$ . В силу леми 6.1,  $p(\varphi)\bar{v} = \bar{v}_1 \in V$ ,  $r(\varphi)\bar{w} = \bar{w}_1 \in W$ . Отже,  $\bar{x} \in V + W$  а так як  $U \cap W = \{0\}$ , то  $U = V \oplus W$ . Якщо  $\bar{v} \in V$ , то  $\bar{v} = g(\varphi)(u)$ ,  $u \in U$  і в силу (9.1),  $h(\varphi)g(\varphi)(u) = h(\varphi)(\bar{v}) = \bar{0}$ . З іншої сторони, якщо  $h(\varphi)(\bar{x}) = \bar{0}$ , то з співвідношення  $\bar{x} = p(\varphi)g(\varphi)(\bar{x}) + r(\varphi)h(\varphi)(\bar{x})$  отримаємо:  $\bar{x} = g(\varphi)(p(\varphi)\bar{x}) \in V$ . Отже,  $V$  - корневий підпростір оператора  $\varphi$ , відповідне кореню  $\lambda_{k+1}$ . З іншої сторони,  $W$  -  $\varphi$ -інваріантний підпростір. Як і в доведенні теореми Гамільтона-Келі, можна показати, що  $g(\varphi)$  - характеристичний многочлен обмеження оператора  $\varphi$  на  $W$ . За припущенням індукції  $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ , де  $W_i$  - корневий підпростір оператора  $\varphi$ , відповідний кореню  $\lambda_i$ ;  $i=1, 2, \dots, k$ . Тому  $U = V \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ , що і потрібно було довести.

Якщо за базис простору  $U$  взяти об'єднання базисів корневих підпросторів оператора  $\varphi$  у вказаному базисі буде мати клітинний вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix}$$

де  $A_i$  - матриця обмеження оператора  $\varphi$  на кореневому підпросторі, відповідному кореню  $\lambda_i$ ;  $i=1, 2, \dots, k$ . Тому задача знаходження базису, в якому матриця лінійного оператора  $\varphi$  мала б простіший вигляд, зводиться до аналогічної задачі для корневих підпросторів.

Отже, нехай  $U$  - простір  $\varphi$  - лінійний оператор, який діє в просторі  $U$ , причому характеристичний многочлен  $f(x)=(x - \lambda)^n$ .

Розглянемо спочатку випадок, коли в просторі  $U$  існує такий вектор  $\bar{u}$ , що  $(\varphi - \lambda e)^{n-1}(\bar{u}) \neq \bar{0}$ . Нехай  $\bar{u}_0 = \bar{u}$ ,  $\bar{u}_i = (\varphi - \lambda e)^i(\bar{u}_0)$ ,  $i=1, 2, \dots, n-1$ . Покажемо, що  $\{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}\}$  - базис простору  $U$ . Для цього достатньо встановити лінійну незалежність вказаної системи векторів. Нехай  $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \bar{u}_i = \bar{0}$ . В силу теореми Гамільтона-Келі  $(\varphi - \lambda e)^n(\bar{u}_0) = \bar{0}$ . Тому при  $i > 0$   $(\varphi - \lambda e)^{n-1}(\bar{u}_i) = (\varphi - \lambda e)^{n+i-1}(\bar{u}_0) = \bar{0}$ . З іншої сторони  $(\varphi - \lambda e)^{n-1}(\bar{u}_0) = \bar{u}_{n-1} \neq \bar{0}$  за умовою. Звідси  $(\varphi - \lambda e)^{n-1}(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \bar{u}_i) = \alpha_0 \bar{u}_{n-1} = \bar{0}$ ; тому  $\alpha_0 = 0$ . Отже,  $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \bar{u}_i = \bar{0}$ ; застосовуючи до цього співвідношення оператор  $(\varphi - \lambda e)^{n-2}$ , отримаємо, що  $\alpha_1 = 0$ . Повторюючи вказаний процес, матимемо:  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1} = 0$ . Отже,  $\{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}\}$  - базис простору  $U$ . В цьому базисі матриця оператора  $\varphi$  має вид:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Матриця вказаного виду називається жордановою кліткою. Доведемо тепер, що якщо  $U$  - кореневий підпростір оператора  $\varphi$ , то в загальному випадку матриця  $\varphi$  в деякому базисі має вид:

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{bmatrix}$$

де  $B_i$  - жорданова клітка  $i=1, 2, \dots, k$ . Вказана матриця називається Жордановою. Отже, нехай  $(\varphi - \lambda e)^s = 0$ ,  $(\varphi - \lambda e)^{s-1} \neq 0$ ;  $s \leq n$  (випадок  $s=n$  розібраний вище). Якщо  $\bar{u}_0 \in U$  такий

вектор, що  $(\varphi - \lambda e)^{s-1}(\bar{u}_0) \neq 0$ , то нехай  $\bar{u}_i = (\varphi - \lambda e)^i(\bar{u}_0)$ ,  $i=1, 2, \dots, s-1$ . Вище було встановлено, що система векторів  $\{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{s-1}\}$  - лінійно незалежна. Нехай  $V = L\{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{s-1}\}$ . Очевидно  $V$  -  $\varphi$ -інваріантний підпростір простору  $U$ . Нехай  $W$  -  $\varphi$ -інваріантний підпростір в  $U$  максимальної розмірності, що задовільняє умові  $V \cap W = \{\bar{0}\}$ . Покажемо, що  $U = V \oplus W$ . Для цього достатньо встановити, що  $U = V + W$ . Якщо це не так, то в  $U$  існує такий вектор  $\bar{x}$ , що  $\bar{x} \notin V + W$ , але  $(\varphi - \lambda e)(\bar{x}) \in V + W$ . Оскільки  $(\varphi - \lambda e)(\bar{x}) \in V + W$ , то  $(\varphi - \lambda e)(\bar{x}) = \bar{v} + \bar{l}$ ,  $\bar{v} \in V$ ,  $\bar{l} \in W$ . Маємо  $(\varphi - \lambda e)^{s-1}((\varphi - \lambda e)(\bar{x})) = (\varphi - \lambda e)^s(\bar{x}) = \bar{0}$ ,  $(\varphi - \lambda e)^{s-1}(\bar{v} + \bar{l}) = (\varphi - \lambda e)^{s-1}(\bar{l}) + (\varphi - \lambda e)^{s-1}(\bar{v}) = \bar{0}$ . Оскільки  $V$  і  $W$  -  $\varphi$ -інваріантні підпростори і  $V \cap W = \{\bar{0}\}$ , то  $(\varphi - \lambda e)^{s-1}(\bar{v}) = \bar{0}$ , тому  $\bar{v} = \sum_{i=1}^{s-1} \gamma_i \bar{u}_i$ ; таким чином  $\bar{v} = (\varphi - \lambda e)(\sum_{i=1}^{s-1} \gamma_i \bar{u}_{i-1}) = (\varphi - \lambda e)(\bar{v}_1)$ , де  $\bar{v}_1 = \sum_{i=1}^{s-1} \gamma_i \bar{u}_{i-1} \in V$ . Тому  $(\varphi - \lambda e)(\bar{x}) = (\varphi - \lambda e)(\bar{v}_1) + \bar{l}$ , або  $(\varphi - \lambda e)(\bar{x} - \bar{v}_1) \in W$ , але  $(\bar{x} - \bar{v}_1) \in V + W$ . Розглянемо підпростір  $T = L(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_k, \bar{x} - \bar{v}_1)$ , де  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_k\}$  - базис підпростору  $W$ . Очевидно  $T \supset W$ , але  $T \neq W$ , так як  $(\bar{x} - \bar{v}_1) \notin W$ . З іншої сторони  $(\varphi - \lambda e)(\bar{x} - \bar{v}_1) \in W$ , тобто  $\varphi(\bar{x} - \bar{v}_1) - \lambda_1(\bar{x} - \bar{v}_1) \in W \subset T$ , або  $\varphi(\bar{x} - \bar{v}_1) \in T$ . Крім того,  $\varphi(\bar{f}_i) \in W \subset T$ ,  $i=1, 2, \dots, k$  в силу  $\varphi$ -інваріантності підпростору  $W$ . Отже  $T$  - також  $\varphi$ -інваріантний підпростір, і  $T \cap V = \{\bar{0}\}$ . Дійсно, якщо  $\bar{g} \in T \cap V$ , то  $\bar{g} = \alpha(\bar{x} - \bar{v}_1) + \sum_{i=1}^k \beta_i \bar{f}_i$ . Коефіцієнт  $\alpha \neq 0$ , інакше  $(\bar{x} - \bar{v}_1) \in V + W$ . Так як  $\alpha \neq 0$ , то  $\bar{g} \in V \cap W = \{\bar{0}\}$ , тобто  $\bar{g} = \bar{0}$ . Отже,  $T$  -  $\varphi$ -інваріантний підпростір,  $T \cap V = \{\bar{0}\}$  і розмірність  $T$  більше розмірності  $W$ . Це протирічить вибору підпростору  $W$ . Отже,  $U = V \oplus W$ . Так як розмірність  $W$  менше розмірності  $U$ , то за індукцією можна вважати, що в якомусь базисі підпростору  $W$  матриця обмеження оператора  $\varphi$  на  $W$  є жордановою.

В силу  $\varphi$ -інваріантності підпростору  $V$ , матриця оператора  $\varphi$  у відповідному базисі простору  $U$  також буде жордановою. Будемо називати жордановою також матрицю виду:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{bmatrix}$$



де  $A_i$  - жорданова клітина,  $i=1, 2, \dots, m$ ; при цьому власні значення, яким відповідають клітини  $A_i$  можуть бути різними.

Отже має місце теорема.

ТЕОРЕМА 9.3.

Нехай  $\varphi$  - лінійний оператор, що діє на просторі  $U$  над полем  $F$ , причому всі корені характеристичного многочлена оператора  $\varphi$  належать  $F$ ; тоді матриця оператора  $\varphi$  у відповідному базисі простору  $U$  є жордановою.

Для практичного знаходження жорданової матриці лінійного оператора  $\varphi$  можна діяти за наступною схемою. Позначимо через  $d_i$  дефект лінійного оператора  $(\varphi - \lambda_0 e)^i$ , де  $\lambda_0$  - дане власне значення оператора  $\varphi$ . Для знаходження дефекту лінійного оператора потрібно з розмірності простору  $U$  відняти ранг оператора, тобто ранг матриці цього оператора в довільному базисі.

Тоді  $d_1$  - загальне число жорданових клітин, які відповідають власному значенню  $\lambda_0$ ;  $(d_2 - d_1)$  - число клітин розмірності більше ніж 1,  $(d_i - d_{i-1})$  - число клітин розмірності більше ніж  $i-1$ . Так як простір  $U$  має скінченну розмірність, то для деякого  $k$ ,  $d_k = d_{k+1}$ . Отже, жорданові клітини, що відповідають власному значенню  $\lambda_0$ , мають максимальну розмірність  $k$ .

Клітин такої розмірності маємо  $(d_k - d_{k-1})$  штук. Клітин розмірності  $(k-1)$  буде  $(d_{k-1} - d_{k-2}) - (d_k - d_{k-1})$  штук і т.д.

## Євклідові простори

### ОЗНАЧЕННЯ 10.1.

Євклідовим векторним простором називається векторний простір  $V$  над полем дійсних чисел  $R$ , для якого визначене відображення  $\tau : V \times V \rightarrow R$ , яке має наступні властивості:

$$\tau(\bar{a}, \bar{a}) \geq 0, \text{ причому якщо } \bar{a} \neq 0, \text{ то } \tau(\bar{a}, \bar{a}) > 0;$$

$$\tau(\bar{a}, \bar{b}) = \tau(\bar{b}, \bar{a});$$

$$\tau(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}) = \tau(\bar{a}, \bar{b}) + \tau(\bar{a}, \bar{c}); \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V$$

$$\tau(\alpha \bar{a}) = \alpha \tau(\bar{a}), \alpha \in R, \bar{a} \in V$$

Число  $\tau(\bar{a}, \bar{b}) \in R$  називається скалярним добутком векторів  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$ . Для зручності  $\tau(\bar{a}, \bar{b})$  будемо позначати через  $\bar{a} \bar{b}$ . З властивостей 3 і 4 скалярного добутку випливає, що  $\bar{a} \bar{0} = 0$  для будь-якого  $\bar{a} \in V$  і  $\bar{a} (\sum_{i=1}^k \beta_i \bar{b}_i) = \sum_{i=1}^k \beta_i (\bar{a} \bar{b}_i)$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 10.2.

Вектори  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  євклідового простору  $V$  називаються ортогональними, якщо  $\bar{a} \bar{b} = 0$ ;  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  називаються також взаємно ортогональними.

### ОЗНАЧЕННЯ 10.3.

Система векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$  називається ортогональною, якщо будь-які два вектора цієї системи взаємно ортогональні. Ортогональна система векторів, яка є базисом простору  $V$ , називається ортогональним базисом цього простору.

### ТЕОРЕМА 10.1.

Ортогональна система ненульових векторів євклідового простору лінійно незалежна.

Доведення:

Нехай  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_m\}$  - ортогональна система векторів євклідового простору  $V$ ,

$\bar{a}_i \neq 0, i=1, 2, \dots, m$ . Нехай  $\sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{a}_i = \bar{0}$ ; тоді  $0 = \bar{a}_j \bar{0} = \bar{a}_j (\sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{a}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{a}_j \bar{a}_i = \alpha_j \bar{a}_j \bar{a}_j$ ,  $j=1, 2, \dots, m$ . Звідси  $\alpha_j = 0$ , тому що  $\bar{a}_j \bar{a}_j > 0$ . Тобто  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ . Система векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_m\}$  лінійно незалежна.

Теорема доведена.

ТЕОРЕМА 10.2.

Кожна ортогональна система ненульових векторів євклідового простору  $V$  може бути доповнена до ортогонального базису цього простору.

Доведення:

Нехай  $n$  - розмірність простору  $V$  і  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_m\}$  - ортогональна система ненульових векторів з  $V$ . Якщо  $m=n$ , то доведення очевидне. Якщо  $m<n$ , то доведемо існування ортогональної системи ненульових векторів, що містить  $(m+1)$  вектор. Насправді, оскільки  $m<n$ , то в просторі  $V$  існує такий вектор  $\bar{b}$ , що система  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_m, \bar{b}\}$  - лінійно незалежна. Нехай  $\bar{a}_{m+1} = \bar{b} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{a}_i$  і підберемо коефіцієнти  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  так щоб система  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_m, \bar{a}_{m+1}\}$  була ортогональною. Якщо  $k \leq m$ ;  $j \leq m$ ,  $k \neq j$ , то  $\bar{a}_k \bar{a}_j = 0$  за умовою. Нехай  $j=m+1$ , тоді  $\bar{a}_k \bar{a}_{m+1} = \bar{a}_k (\bar{b} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{a}_i) = \lambda_k \bar{a}_k \bar{a}_k + \bar{a}_k \bar{b}$ ,  $k \leq m$ . Прирівнявши цей вираз до нуля отримаємо:

$$\lambda_k = \frac{\bar{a}_k \bar{b}}{\bar{a}_k \bar{a}_k}, (\bar{a}_k \bar{a}_k > 0), k=1, 2, \dots, m.$$

При такому виборі коефіцієнтів  $\lambda_i$  система векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_m, \bar{a}_{m+1}\}$  буде ортогональною. Крім того,  $\bar{a}_{m+1} \neq 0$ , тому що система векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_m, \bar{b}\}$  лінійно незалежна. Отже  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_m, \bar{a}_{m+1}\}$  - ортогональна система ненульових векторів. Якщо  $m=n$ , то теорема доведена. Якщо ж  $m+1<n$ , то продовжимо процес розширення ортогональної системи ненульових векторів, поки не отримаємо ортогональний базис.

НАСЛІДОК 10.1.

Будь-який євклідовий простір  $V$  має ортогональний базис.

Доведення:

Нехай  $\bar{a}_1 \in V$ ,  $\bar{a}_1$  - довільний ненульовий вектор. Нехай  $\{\bar{a}_1\}$  вихідна ортогональна система ненульових векторів і доповнимо її до ортогонального базису простору  $V$ .

ОЗНАЧЕННЯ 10.4.

Нехай  $M$  - непуста підмножина євклідового простору  $V$ . Вектор  $\bar{a}$  називається ортогональним множині  $M$ , якщо  $\bar{a}$  ортогональний кожному вектору множини  $M$ .

Вектор  $\bar{a}$  ортогональний множині  $M$ , позначається так:  $\bar{a} \perp M$ . Через  $M^\perp$  позначають множину всіх векторів, ортогональних множині  $M$ .

за допомогою властивостей 3 і 4 скалярного добутку легко довести замкнутість множини  $M^\perp$  відносно додавання векторів і множення вектора на скаляр. Отже, в силу теореми 2.2,  $M^\perp$  - підпростір векторного простору  $V$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 10.5.

Нехай  $W$  - підпростір евклідового простору  $V$ ; підпростір  $M^\perp$  називається ортогональним доповненням до підпростору  $W$ .

### ТЕОРЕМА 10.3.

Якщо  $W$  - ненульовий підпростір евклідового простору  $V$ ,  $W \neq V$ , то  $V = W \oplus W^\perp$ .

#### Доведення:

Нехай  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_m\}$  - ортогональний базис підпростору  $W$ . В силу теореми 2.2, вказану систему векторів можна доповнити до ортогонального базису простору  $V$ . Нехай  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_m, \bar{a}_{m+1}, \dots, \bar{a}_n\}$  - ортогональний базис простору  $V$  ( $m < n$ ). Легко довести, що  $W^\perp = L(\bar{a}_{m+1}, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ . Тоді очевидно  $V = W \oplus W^\perp$ .

Теорема доведена.

### ОЗНАЧЕННЯ 10.6.

Нормою вектора евклідового простору називається арифметичний квадратний корінь зі скалярного квадрата вектора.

Норма вектора  $\bar{a}$  позначається через  $|\bar{a}|$ . За означенням  $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}\bar{a}}$ . Якщо  $|\bar{a}| = 1$ , то вектор  $\bar{a}$  називається нормованим.

### ТЕОРЕМА 10.4.

Якщо  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  - вектори евклідового простору, і  $\lambda \in R$  то:

- 1)  $|\bar{a}| \geq 0$ , причому  $|\bar{a}| = 0$  тоді і тільки тоді, коли  $\bar{a} = \bar{0}$ ;
- 2)  $|\lambda \bar{a}| = |\lambda| |\bar{a}|$ ;
- 3)  $|\bar{a} \bar{b}| \leq |\bar{a}| |\bar{b}|$  (нерівність Коши-Буняковського);
- 4)  $|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$  (нерівність трикутника).

#### Доведення:

1) Очевидно;

$$2) |\lambda \bar{a}| = \sqrt{(\lambda \bar{a})(\lambda \bar{a})} = \sqrt{\lambda^2 \bar{a}\bar{a}} = |\lambda| \sqrt{\bar{a}\bar{a}} = |\lambda| |\bar{a}|;$$

3) Якщо  $\bar{a} = \bar{0}$  або  $\bar{b} = \bar{0}$ , то нерівність з пункту 3 виконується.

Нехай  $\bar{a} \neq \bar{0}$ ,  $\bar{b} \neq \bar{0}$ . Тоді для будь-яких  $\alpha, \beta \in R$ ,  $(\alpha \bar{a} + \beta \bar{b})(\alpha \bar{a} + \beta \bar{b}) \geq 0$ ; звідси  $\alpha^2 \bar{a} \bar{a} + 2\alpha \beta \bar{a} \bar{b} + \beta^2 \bar{b} \bar{b} \geq 0$ . Нехай  $\alpha = |\bar{b}|$ ,  $\beta = -|\bar{a}|$ ; тоді  $|\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 + 2|\bar{a}| |\bar{b}| \bar{a} \bar{b} + |\bar{b}|^2 |\bar{a}|^2 \geq 0$ ; або

$2|\bar{a}||\bar{b}|(|\bar{a}||\bar{b}| + \bar{a}\bar{b}) \geq 0$ . Оскільки  $|\bar{a}||\bar{b}| > 0$ , то  $|\bar{a}||\bar{b}| \geq -\bar{a}\bar{b}$ . Отримана нерівність справедлива для будь-яких ненульових векторів  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$ . Замінемо в ньому вектор  $\bar{a}$  на  $(-\bar{a})$ . Оскільки  $|\bar{a}| = |-\bar{a}|$  (п.2 теореми), то  $|\bar{a}||\bar{b}| \geq \bar{a}\bar{b}$ ; тому  $|\bar{a}\bar{b}| \leq |\bar{a}||\bar{b}|$ .

4)  $|\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a} + \bar{b}||\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a}|^2 + 2\bar{a}\bar{b} + |\bar{b}|^2 \leq |\bar{a}|^2 + 2|\bar{a}\bar{b}| + |\bar{b}|^2 = (|\bar{a}| + |\bar{b}|)^2$ . Оскільки  $|\bar{a} + \bar{b}| > 0$ , і  $|\bar{a}| + |\bar{b}| > 0$ , то добуваючи квадратний корінь з обох частин нерівності отримаємо:  $|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 10.7.

Система векторів євклідового векторного простору називається ортонормованою, якщо вона є ортогональною і кожен його вектор нормований. Якщо така система векторів утворює базис євклідового простору, то він називається ортонормованим базисом цього простору.

### ТЕОРЕМА 10.5.

В євклідовому векторному просторі існує ортонормований базис.

#### Доведення:

В силу теореми 10.3, в євклідовому векторному просторі існує ортогональний базис  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$ . Оскільки  $\bar{a}_i \neq 0$ , то  $|\bar{a}_i| > 0$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . Очевидно система векторів  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n\}$ , де  $\bar{e}_i = \frac{1}{|\bar{a}_i|} \bar{a}_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  буде ортонормованим базисом нашого простору.

Навчальне видання

СПІВАКОВСЬКИЙ Олександр Володимирович  
КРЕКНІН Віталій Андрійович

# Лінійна алгебра

Навчальний посібник

підп. до друку

Формат

Папір друк. № . Спосіб друку офсетний. Умовн. друк. арк. .

Умовн. фарбо-відб. . Обл.-вид. арк.

Тираж 1000 .Зам.№

---

ЗАО “Айлант”

325000, Херсон, пр. Ушакова, 69.