

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.В. Співаковський

# Лінійна алгебра з використанням інформаційних технологій

Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів  
вищих навчальних закладів  
(лист Міністерства освіти і науки  
України № 1/11-3187 від 22.07.03)

Херсон 2003

О.В.Співаковський.

Лінійна алгебра з використанням інформаційних технологій  
Навч.посібник.-Херсон, 2003.-190 с.

Ця книга є навчальним посібником з курсу лінійної алгебри. Вона може бути використана при вивченні відповідного розділу алгебри в університетах і педагогічних університетах, а також у курсі вищої математики технічних університетів. Коло користувачів пропонованого навчального посібника є досить широким, оскільки лінійна алгебра є одним з найважливіших розділів математики і для багатьох прикладних теорій та наук є однією з базисних математичних дисциплін. Достатньо нагадати, що найважливіші математико-економічні моделі та методи є по суті лінійними.

Даний посібник призначається для методичного забезпечення навчального процесу, у якому практичні заняття з лінійної алгебри проводяться з застосуванням комп'ютерних технологій.

Для студентів вищих навчальних закладів і технікумів, а також слухачів інститутів підвищення кваліфікації.

Рецензенти: В.Г.Бутенко член-кореспондент АПН України,  
доктор педагогічних наук, професор.

А.М.Гуржій, член-кореспондент АПН України, доктор  
технічних наук, професор.

П.Ф.Жук, доктор фізико-математичних наук, доцент.

## ЗМІСТ

Вступ	3
Глава 1. Системи лінійних рівнянь. Попередні відомості	7
1.1 Рівносильні перетворення систем лінійних рівнянь	8
1.2 Алгоритм виключення змінних	10
1.3 Матриця системи лінійних рівнянь	11
1.4 Перетворення матриць	12
1.5 Однорідні системи лінійних рівнянь	14
1.6 Загальний розв'язок системи лінійних рівнянь	21
Глава 2. Векторні простори	23
2.1 Означення векторного простору	23
2.2 Властивості векторних просторів	24
2.3 Приклади векторних просторів	26
2.4 Вправи	29
2.5 Лінійна залежність векторів	31
2.6 Властивості лінійно незалежних систем векторів	34
2.7 Приклади	34
2.8 Вправи	38
2.9 Еквівалентні системи векторів	39
2.10 Елементарні перетворення систем векторів	40
Глава 3. Базис і розмірність векторного простору	45
3.1. Ранг системи векторів	45
3.2. Базис і розмірність векторного простору	47
3.3. Ізоморфні відображення векторних просторів	52
3.4. Властивості ізоморфного відображення	53
3.5. Підпростори	57
3.6. Лінійні многовиди	66
Глава 4. Матриці	68
4.1. Матриці і дії над ними	68
4.2. Елементарні матриці	82
Глава 5. Ранг матриці	86
5.1. Рядковий та стовцевий ранг матриці	86
5.2. Визначник матриці	94
5.3. Визначники та елементарні перетворення	99
Глава 6. Лінійні оператори	107

Глава 7. Системи лінійних рівнянь	118
Глава 8. Власні вектори лінійного оператора	125
Глава 9. Жорданова форма матриці	128
Глава 10 Євклідові простори	139
Глава 11. Система „Світ лінійної алгебри”	145
11.1 Загальні відомості	145
11.2 Система команд Середовища розв’язування задач	149
11.3 Вправи	151
11.3.1 Системи лінійних рівнянь	151
11.3.2 Обчислення визначника матриці	159
11.3.3 Обернена матриця	163
11.3.4 Характеристичний многочлен лінійного оператора	167
11.3.5 Власні вектори лінійного оператора	174
11.3.6 Обчислення рангу матриці	178
11.3.7 Жорданова форма матриці	181
11.3.8 Ортогоналізація системи векторів	186

# ВСТУП

Ця книга є навчальним посібником з курсу лінійної алгебри. Вона може бути використана при вивченні відповідного розділу алгебри в університетах і педагогічних університетах, а також у курсі вищої математики технічних університетів. Коло користувачів пропонованого навчального посібника є досить широким, оскільки лінійна алгебра є одним з найважливіших розділів математики і для багатьох прикладних теорій та наук є однією з базисних математичних дисциплін. Достатньо нагадати, що найважливіші математико-економічні моделі та методи є по суті лінійними. Тому лінійна алгебра входить у навчальні програми багатьох спеціальностей.

Посібник призначено для методичного забезпечення навчального процесу, у якому практичні заняття з лінійної алгебри проводяться з застосуванням комп'ютерних технологій. Спеціально для цього кафедрою інформаційних технологій Херсонського державного університету розроблене педагогічне програмне середовище «Світ лінійної алгебри», у якій основні задачі лінійної алгебри вирішуються користувачем «по кроках». Кожен крок означає виконання одного з перетворень. Користування програмним середовищем можливо тільки за умови знання учнями алгоритмів рішення задач лінійної алгебри. Програма лише звільняє користувача від рутинних обчислень. Програмне середовище містить у собі також систему «Експерт», до якої можна звернутися в скрутних ситуаціях - для одержання консультації. Крім того, «Експерт» може крок за кроком продемонструвати учню хід розв'язання задачі, починаючи з будь-якого моменту аж до одержання відповіді. Закінчивши розв'язання задачі самостійно і записавши відповідь, користувач може звернутися до «Експерта» для підтвердження правильності отриманого результату. Інтерфейс користувача максимально наближений до звичайного: місце зошитового листа заміняє спеціальне вікно, що розділено на двох частин – Чернетка і Чистовик. Усі кроки рішення здійснюються в Чернетці. Тут користувач має можливість вносити зміни. Результат рішення і деякі істотні його етапи учень може скопіювати в Чистовик.

Добре відомо, що рішення задач лінійної алгебри зв'язано з великим числом стандартних арифметичних обчислень. Здійснення цих обчислень вимагає наявності достатнього резерву часу і відволікає студентів від істотних моментів алгоритмів розв'язання задач. Використання педагогічного програмного середовища «Світ лінійної алгебри» під час практичних занять по лінійній алгебрі дасть можливість студентам зосередитися на ідейній стороні досліджуваного матеріалу, дозволить йому вирішити велика кількість однотипних завдань за обмежений відрізок часу, що, у свою чергу, буде сприяти більш швидкому і міцному оволодінню методами і навичками розв'язання задач. Крім того, середовище допоможе викладачеві більш ефективно контролювати роботу учнів і розширить можливості індивідуального підходу до кожного з них.

Як відомо, практично найбільш зручним і ефективним методом розв'язання задач лінійної алгебри є метод виключення змінних, який називається методом Гауса. Кожен окремий етап перетворення матриці методом Гауса може бути здійснений за допомогою множення цієї матриці зліва або справа на елементарну матрицю. Відповідно до цього система операцій середовища включає наступні команди роботи над матрицями: «Скласти два рядки матриці», «Помножити рядок на число», «Додати до даного рядка інший рядок, помножений на деяке число», «Переставити два рядки місцями», «Уставити додатковий нульовий рядок», «Витерти рядок», «Перемножити матриці» і т.д. Деякі з зазначених операцій передбачені і для стовпців матриці.

Скорочений варіант пропонованого навчального посібника (українською мовою) і прототип середовища «Світ лінійної алгебри» (реалізований в ОС MS DOS) протягом багатьох років використовувався у викладанні лінійної алгебри в ХГПУ і показав свою ефективність.

Пропонований варіант підручника значно розширений і видозмінений. Зокрема, у нього включені приклади векторних просторів, приклади лінійних операторів, вправи теоретичного характеру, і система практичних задач зі зразками рішення.

Зміст посібника відповідає програмі по алгебрі і теорії чисел для університетів, педагогічних і технічних університетів.

У новій версії ППС «Світ лінійної алгебри» (під Windows) врахований досвід її експлуатації і використані всі переваги

сучасних технологій графічного інтерфейсу, що зробить її ще більш досконалим педагогічним програмним засобом підтримки практичних занять з лінійної алгебри.

Зрозуміло, що перша задача на сьогоднішній день може бути розв'язана тільки викладачем і комп'ютер в цьому випадку буде виступати як інструмент, який виконує управління засвоєнням нових знань.

Але також очевидно і те, що передаючи комп'ютеру управління для розв'язування другої задачі, необхідно чітко уявляти, що програмний продукт повинен повністю підтримувати "ідеологію" теоретичного курсу.

Інтерфейс педагогічного програмного середовища "Світ лінійної алгебри" побудоване за наступними принципах

- користувач повинен працювати з реальними об'єктами предметної області (матрицями, системами лінійних рівнянь і т.п.), а тексти і питання з'являються на екрані тільки в самих необхідних випадках;

- користувач повинен працювати тільки в реальній операційній системі, яка однозначно визначається предметною областю (наприклад для матриць: додати два рядки, помножити рядок на число, переставити два рядки місцями, перемножити матриці і т.п.);

- інтерфейс користувача повинен максимально наближатися до звичайного (лист паперу замінитися вікном на екрані, при цьому бажано мати чернетку, яку ніхто не бачить і чистовик для викладача; у вікні чи вікнах знаходиться історія розв'язування користувачем у вигляді послідовності реальних об'єктів навчального курсу, по яких можна пересуватись вперед або назад; якщо деякі числові розрахунки не мають відношення до змісту задачі, то програма бере їх на себе);

- програма повинна давати користувачу широку можливість дій у рамках предметної області (наприклад, з матрицею можна робити будь-які елементарні перетворення у будь-якій послідовності, головне знайти її ранг), тобто користувач не повинен знаходитись під тягарем алгоритму розв'язування, визначеного на стадії написання програмно-педагогічного засобу (ППЗ). При цьому користувач мусить мати можливість пересуватись по своїх діях, вставляючи між ними нові. Користувач повинен завжди мати вихід із скрутних становищ, для чого в ППЗ має бути реалізований так званий експерт, який

вмітиме теоретично пояснити кожен крок, починаючи з того, де перебуває користувач, і, використовуючи тільки певне операційне середовище, показати у вигляді мультимедіа розв'язування поставленої задачі. При цьому, його на відміну від викладача, можна в будь-який момент перервати і продовжити розв'язування самому;

– історія роботи користувача мусить бути представлена у вигляді послідовності його дій, а при бажанні закінчити роботу має з'явитись інформація яка б аналізувала підсумки його дій.



## Глава 1. Системи лінійних рівнянь. Попередні відомості

## ОЗНАЧЕНИЯ 1.1

Системою лінійних рівнянь над полем  $F$  з змінними  $x_1, x_2, \dots, x_n$  називається система рівнянь виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.1)$$

## ОЗНАЧЕННЯ 1.2

Розв'язком системи лінійних рівнянь (1.1) називається впорядкований набір елементів поля  $F$   $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in F^n$ , підстановка яких замість змінних в рівняння системи перетворює всі рівняння цієї системи в рівності.

Отже, якщо  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  – розв'язок системи (1.1.), то виконуються рівності:

$$a_{i1}\lambda_1 + a_{i2}\lambda_2 + \dots + a_{in}\lambda_n = b_i, i = 1, 2, \dots, m.$$

*Елементи поля  $F$  прийнято називати скалярами або числами, а впорядковані набори скалярів – векторами.*

## ЗАУВАЖЕННЯ

*В главі 2 ми визначимо загальне поняття векторного простору як множини векторів, яка задовольняє певним властивостям – аксіомам векторного простору. Ми також наведемо приклади конкретних векторних просторів. Один з них – так званий арифметичний векторний простір. Елементами цього простору є впорядковані набори скалярів.*

## ОЗНАЧЕНИЯ 1.3

Система лінійних рівнянь називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок. Система лінійних рівнянь називається несумісною, якщо вона немає розв'язків.

## ОЗНАЧЕНИЯ 1.4

Дві системи лінійних рівнянь називаються рівносильними, якщо кожен розв'язок однієї з них є розв'язком іншої, тобто коли їхні множини розв'язків співпадають.

Багато практичних задач зводяться до розв'язання систем лінійних рівнянь. Методи розв'язання систем лінійних рівнянь з двома та трьома змінними вивчалися в курсі аналітичної геометрії. Зараз ми поширимо ці методи на довільні системи лінійних рівнянь.

## 1.1 Рівносильні перетворення систем лінійних рівнянь

Розв'язуючи рівняння або системи рівнянь, звичайно користуються так званими рівносильними перетвореннями, тобто такими перетвореннями рівняння або системи рівнянь, які не змінюють множини розв'язків. Мета перетворень полягає в тому, щоб спростити рівняння або системи рівнянь. Для систем лінійних рівнянь можна вказати три типи таких перетворень: *перестановки* рівнянь, *елементарні перетворення* рівнянь, *множення* рівнянь на ненульовий скаляр.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots\dots\dots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots\dots\dots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Перестановка  $P_{ij}$  рівнянь системи – це перестановка місцями  $i$ -того та  $j$ -того рівнянь в системі (1.2).

### ЛЕМА 1.1

Перестановка рівнянь системи є рівносильним перетворенням цієї системи.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots\dots\dots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a'_{i1}x_1 + a'_{i2}x_2 + \dots + a'_{in}x_n = b'_i \\ \dots\dots\dots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Елементарним перетворенням  $F_{ij}(\lambda)$  системи називають перетворення її  $i$ -того рівняння за формулами

$$a'_{ik} = a_{ik} + \lambda \cdot a_{jk}, \quad b'_i = b_i + \lambda \cdot b_j, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j. \quad (1.4)$$

### ЛЕМА 1.2

При  $i \neq j$  елементарне перетворення  $F_{ij}(\lambda)$  системи лінійних рівнянь є рівносильним перетворенням цієї системи.

Доведення.

Розглянемо будь-який розв'язок  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  системи - лівої частини перетворення (1.3). Підставимо цей вектор в праву частину перетворення (1.3). Оскільки в цій частині змінилося тільки  $i$ -те рівняння, достатньо довести, що воно також перетворилося в рівність.

$$\sum_{k=1}^n a'_{ik} \cdot x_k = \sum_{k=1}^n (a_{ik} + \lambda \cdot a_{jk}) \cdot x_k = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot x_k + \sum_{k=1}^n \lambda \cdot a_{jk} \cdot x_k =$$

$$b_i + \lambda \cdot \sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot x_k = b_i + \lambda \cdot b_j = b'_i$$

Таким же чином можна довести, що довільний розв'язок системи – правої частини перетворення є також розв'язком системи – лівої частини перетворення (1.3).

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ \lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \dots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (1.5)$$

### ЛЕМА 1.3

Множення  $M_i(\lambda)$   $i$ -того рівняння системи на ненульовий скаляр є рівносильним перетворенням цієї системи.

## ЗАУВАЖЕННЯ

*Для кожного з рівносильних перетворень, які ми визначили, легко можна побудувати обернене до нього. Таким чином, послідовність рівносильних перетворень можна проводити в ту чи іншу сторону.*

## 1.2 Алгоритм виключення змінних

За допомогою рівносильних перетворень системи можна перейти до системи, в якій одна із змінних, наприклад,  $x_1$ , буде входити лише до 1-ого рівняння системи. Таким чином, після перетворення система лінійних рівнянь буде мати вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots\dots\dots \\ a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Для цього потрібно:

1. Знайти в системі (1.1) рівняння, яке містить змінну  $x_1$  і переставити його на перше місце.

2. Помножити 1-е рівняння системи (1.1) на скаляр  $1/a_{i1}$ , перетворивши таким чином коефіцієнт при  $x_1$  на 1. В результаті отримаємо перше рівняння системи (1.6).
3. Кожне з рівнянь, починаючи з другого, перетворимо таким чином, щоб виключити з нього змінну  $x_1$  за допомогою елементарного перетворення  $F_{i1}(\lambda_i)$ . Для  $i$ -того рівняння системи треба виконати перетворення  $F_{i1}(-a_{i1})$ . Формули (1.4) показують, що при  $\lambda_i = -a_{i1}$  коефіцієнти  $a'_{i1}$  при змінній  $x_1$  в рівняннях з 2-го по  $n$ -те дорівнюють нулю.

Алгоритм виключення змінної зводить задачу розв'язання висхідної  $m \times n$  системи лінійних рівнянь до задачі розв'язання системи з  $m-1$  рівняння зі  $n-1$  змінними. Дійсно, якщо отримати розв'язки системи рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots\dots\dots \\ a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{array} \right. \quad (1.7)$$

то значення змінної  $x_1$  можна обчислити з 1-го рівняння:

$$x_1 = b_1' - a_{12}'x_2 - \dots - a_{1n}'x_n \quad (1.8)$$

Продовжуючи, якщо це можливо, виключення змінних  $x_2, \dots, x_n$  перейдемо до рівносильної системи, яка має більш простий, вигляд, ніж система (1.1). Цю систему вже досить просто і розв'язувати, і досліджувати на сумісність.

### 1.3 Матриця системи лінійних рівнянь.

Оскільки конкретні імена змінних системи лінійних рівнянь не грають ніякої ролі, системі можна поставити у відповідність прямокутну таблицю її коефіцієнтів наступним чином:

[illegible]

Такі прямокутні таблиці в математиці називають матрицями. Тому ми будемо казати про матрицю (1.9) системи (1.1).

При цьому треба розрізняти основну частину матриці системи, яка містить коефіцієнти при змінних системи, та останній стовпчик матриці, який містить вільні члени системи:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Матриця  $A$  називається основною матрицею системи,  $B$  - стовпцем вільних членів. Матриця (1.9) системи називається розширеною матрицею системи. Розширену матрицю  $U$  отримують з  $A$  додаванням до неї стовпця вільних членів  $B$ .

## 1.4 Перетворення матриць

Кожному з рівносильних перетворень системи лінійних рівнянь можна співставити відповідне перетворення матриці  $U$ , яке здійснюється над її рядками. Для цього потрібно лише співставити кожному рядку матриці відповідне рівняння системи і „перекласти” означення рівносильних перетворень системи на мову перетворень рядків її розширеної матриці.

- Перестановка рівнянь системи відповідає перестановці рядків матриці  $U$ .
- Елементарне перетворення рівнянь системи за формулами (1.4) відповідає елементарному перетворенню рядків матриці  $U$  за тими ж формулами.
- Множення рівняння на ненульовий скаляр відповідає (поелементному) множенню рядка на цей скаляр (див. (1.5)).

Алгоритм виключення змінних з системи лінійних рівнянь по суті є алгоритмом перетворення матриці  $U$  до вигляду

$$U' = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{r-1r} & a_{r-1r+1} \dots & a_{r-1n} & b_{r-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{rr+1} \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & b_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & b_m \end{bmatrix}$$

Матриця  $U'$  утворилася в результаті виключення  $r$  змінних, причому подальше застосування алгоритму виключення змінної неможливе. Причина полягає в тому, що рядки основної матриці з  $U'$  є нульовими, тобто неможливо виконати п. 1 алгоритму – знайти ненульовий коефіцієнт при змінній.

Аналізуючи матрицю  $U'$ , можна зробити висновки про сумісність системи (1.1) та кількість її розв'язків.

## ОЗНАЧЕННЯ 1.5

Число  $r$  ненульових рядків основної матриці  $A'$  матриці  $U'$  називається рангом системи лінійних рівнянь (1.1).

## ТЕОРЕМА 1.1.

Якщо ранг системи дорівнює кількості її змінних, система має єдиний розв'язок.

В цьому випадку значення змінних можна обчислити, починаючи з останнього рівняння та змінної  $x_n$

## ТЕОРЕМА 1.2.

Якщо ранг системи менше кількості її змінних, а принаймні для одного з рядків матриці  $U'$  за номерами  $r+1, \dots, m$  елемент



стовпця вільних членів  $b_j$  не дорівнює нулю, система (1.1) несумісна.

### Доведення.

*Якщо  $j$ -тий рядок матриці  $U$  має вигляд  $|0 \ 0 \ \dots \ 0 \ b_j|$ , причому  $b_j \neq 0$ , це означає, що одне з рівнянь системи перетворилося на суперечливу рівність  $0 = b_j$ , тому і система (1.1) є суперечливою, тобто несумісною.*

### ТЕОРЕМА 1.3.

Якщо ранг системи менше кількості її змінних, і всі рядки за номерами  $r+1, \dots, m$  є нульовими, (тобто  $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$ ) система (1.1) має безліч розв'язків.

*Доведення цієї теореми ми викладемо нижче (теорема 1.7).*

### НАСЛІДОК 1.1

*Нульові рядки матриці  $U$  можна видалити з цієї матриці. Насправді, нульовий рядок відповідає рівнянню  $0 = 0$ , яке є тотожністю.*

### 1.5 Однорідні системи лінійних рівнянь

#### ОЗНАЧЕННЯ 1.6

Система лінійних рівнянь називається однорідною, якщо вільні члени всіх її рівнянь дорівнюють нулю.

Отже, однорідна система лінійних рівнянь має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Однорідна система лінійних рівнянь завжди є сумісною, оскільки вона має розв'язок

$$X_k = 0, k = 1, \dots, n.$$

Цей розв'язок називають нульовим або тривіальним.

### TEOPEMA 1.6

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь задовольняє наступним властивостям:

1. Якщо  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  і  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  – два довільних вектори - розв'язки системи (1.10), то і  $(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$  – також розв'язок цієї системи.
2. Якщо  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  - довільний вектор - розв'язок системи (1.10), і  $\gamma$  - довільний елемент поля скалярів  $F$ , то і  $\gamma \cdot \underline{a} = (\gamma \cdot \alpha_1, \dots, \gamma \cdot \alpha_n)$  – також розв'язок цієї системи.

## Доведення

- І. Підставимо в довільне (і-те) рівняння системи (1.10) замість вектору змінних вектор  $(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$  та розкриємо дужки.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(\alpha_j + \beta_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}\beta_j$$

Оскільки вектори  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n)$  є розв'язками

системи, обидві суми  $\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j, \sum_{j=1}^n a_{ij} \beta_j$  дорівнюють нулю.

Отже,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(\alpha_j + \beta_j) = 0.$$

2. Доведення цілком аналогічне попередньому.

Раніше ми визначили поняття елементарного перетворення системи лінійних рівнянь та множення лінійного рівняння на число. Ці перетворення можна визначити через *операції* (почленного) додавання рівнянь та множення рівняння на скаляр. Рівносильним перетворенням системи рівнянь відповідають перетворення рядків матриці, складеної з коефіцієнтів системи лінійних рівнянь. Ці перетворення також природно трактувати як *операції* додавання векторів-рядків і множення вектора-рядка на число. Нарешті, в теоремі 1.6 встановлені властивості, які також можна сформулювати в термінах *операцій* додавання і множення на скаляр векторів-розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь.

Отже, визначимо на множині векторів з  $F^n$  дві алгебраїчні операції – операції додавання та множення на скаляр: якщо

$$\bar{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \bar{b} = (\beta_1, \dots, \beta_n), \quad \text{то за означенням}$$

$$\bar{a} + \bar{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

$$\gamma \cdot \bar{a} = (\gamma \cdot \alpha_1, \dots, \gamma \cdot \alpha_n)$$

Теорему 1.6 тепер можна сформулювати так:

Множина розв'язків системи однорідних лінійних рівнянь замкнута відносно операцій додавання і множення на скаляр.

*НАСЛІДОК 1.2*

Якщо  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$  - довільні вектори розв'язки системи (1.10) і  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  - довільні скаляри, то вектор  $\bar{b} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k$  - також є розв'язком системи (1.10).

### ОЗНАЧЕННЯ 1.7

Вектор  $\bar{b} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k$  називають лінійною комбінацією векторів  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$ .

Отже, довільна лінійна комбінація векторів-розв'язків системи (1.10)  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$  також є розв'язком (1.10).

Для системи (1.10) побудуємо її основну матрицю (матрицю коефіцієнтів) та застосуємо до неї алгоритм послідовного виключення змінних.

### ЗАУВАЖЕННЯ

Оскільки стовпчик вільних членів системи (1.10) є нульовим, його можна не включати до матриці, тому ми будуємо не розширену матрицю, а тільки основну.

Перестановкою стовпців матриці, яка означає перестановку імен змінних системи лінійних рівнянь, можна привести матрицю до вигляду:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Такі матриці називають ступінчастими. Елементи ступінчатих матриць, розташовані під головною діагоналлю, дорівнюють нулю.

Зробимо ще одно перетворення цієї матриці. Наша мета – отримати нулі і над головною діагоналлю.

**Алгоритм приведення матриці до діагонального вигляду**

Використовуючи останній рядок ( $k = r$ ), як ми робили в п.3 алгоритму виключення змінних, виключимо з рівнянь з номерами  $k-1, \dots, 1$  змінну  $x_k$ , тобто перетворимо елементи  $k$ -того стовпця в нулі:  $a_{r-1r} = a_{r-2r} = \dots = a_{1r} = 0$ .

Аналогічно зробимо з іншими рядками, перетворюючи послідовно на нулі всі елементи матриці над головною діагоналлю. В результаті отримаємо матрицю виду:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Система, що відповідає цій матриці, має вид:

[illegible]

Для зручності аналізу перенесемо в кожному рівнянні члени зі змінними  $x_{r+1}, \dots, x_n$  в праві частини рівнянь. Отримаємо:

[illegible]

Зауважимо, що для того, щоб отримати розв'язок системи (1.13), змінним  $x_{r+l}, \dots, x_n$  можна надати довільних значень. Тоді значення змінних  $x_l, \dots, x_r$  можна обчислити з (1.13) через значення  $x_{r+l}, \dots, x_n$ .

### TEOPEMA 1.7

Якщо ранг системи (1.10)  $r$  дорівнює кількості її змінних  $n$ , система має лише один нульовий розв'язок.

Якщо  $r < n$ , система (1.10) має і ненульові розв'язки. Зокрема, якщо поле скалярів  $F$  є нескінченним, система має безліч розв'язків.

Проаналізуємо тепер випадок, коли  $r < n$ , детальніше.

### ОЗНАЧЕННЯ 1.8

Змінні  $x_{r+1}, \dots, x_n$  називаються незалежними. Змінні  $x_1, \dots, x_r$  називаються залежними (від  $x_{r+1}, \dots, x_n$ ).

### ОЗНАЧЕННЯ 1.9

Розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь (1.10), який отримано при значеннях незалежних змінних

$$x_{r+1} = 0, \dots, x_{j-1} = 0, x_j = 1, x_{j+1} = 0, \dots, x_n = 0$$

називається фундаментальним.

Іншими словами, фундаментальний розв'язок системи (1.10) можна отримати, якщо покласти одну з незалежних змінних рівною 1, а інші незалежні змінні – нулю.

Таким чином, система (1.10) має сукупність з  $n - r$  фундаментальних розв'язків. Цю сукупність також будемо називати системою фундаментальних розв'язків. З означення зрозуміло, що кожний фундаментальний розв'язок системи є ненульовим.

### ТЕОРЕМА 1.8

Вектор  $y$  є розв'язком системи (1.10) тоді і тільки тоді, коли його можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів – фундаментальних розв'язків системи (1.10)

$$y = \alpha_1 x_{r+1} + \dots + \alpha_{n-r} x_n \quad (1.14)$$

### Доведення.

Розглянемо систему фундаментальних розв'язків  $x_1, \dots, x_{n-r}$  системи (1.10). Оберемо  $n - r$  скалярів  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$  і складемо лінійну комбінацію  $y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-r} x_{n-r}$ . Доведемо, що  $y$  є розв'язком (1.13). Оскільки система (1.13) рівносильна системі (1.10), тим самим буде доведено, що  $y$  є розв'язком (1.10). Власне доведення будемо проводити методом математичної індукції по кількості фундаментальних розв'язків.

*Базис індукції* ( $n-r = 1$ ).

За теоремою 1.6 якщо  $\mathbf{x}_1$  – розв’язок (1.13), то і  $\alpha_1 \mathbf{x}_1$  – також розв’язок (1.13).

*Крок індукції ( $n-r = m+1$ ).*

Якщо  $y' = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$  – розв'язок (1.13), і

$$\mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{x}_m + \alpha_{m+1} \mathbf{x}_{m+1}, \text{ TO } \mathbf{y} = \mathbf{y}' + \alpha_{m+1} \mathbf{x}_{m+1}.$$

Оскільки  $x_{m+1}$  – розв’язок (1.13), то і  $y'' = \alpha_{m+1} x_{m+1}$  – також розв’язок цієї системи. Тому  $y = y' + y''$  і за теоремою 1.6  $y$  також є розв’язком (1.13).

Доведемо тепер, що для будь-якого розв'язку  $y$  системи (1.13) існують такі скаляри  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ , що  $y = \alpha_1 x_{r+1} + \dots + \alpha_n x_n$ .

Покладемо  $y = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  і підставимо ці значення в систему (1.13').

$$\begin{cases} \beta_1 = -a_{1r+1}\beta_{r+1} - \dots - a_{1n}\beta_n \\ \dots\dots\dots \\ \beta_r = -a_{rr+1}\beta_{r+1} - \dots - a_{rn}\beta_n \end{cases}$$

З іншого боку, обчислимо вектори, фундаментальні розв'язки:

$$\begin{aligned} x_{r+1} &= (-a_{l_{r+1}}, \dots, -a_{rr+1}, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ x_n &= (-a_{ln}, \dots, -a_{rn}, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Отже, неважко помітити, що формула (1.14) має місце, якщо покласти  $\alpha_1 = \beta_{r+1}, \dots, \alpha_r = \beta_n$

## ЗАУВАЖЕННЯ

Порівнюючи формули (1.15) та діагональну матрицю (1.12), можна помітити, що система фундаментальних розв'язків (1.10) по суті записана в останніх  $n - r$  стовпцях цієї матриці. Тому алгоритм діагоналізації є по суті алгоритмом пошуку фундаментальної системи розв'язків однорідної системи, яка представлена трикутною матрицею (1.12). Тому загальний

алгоритм побудови системи фундаментальних розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь (1.10) полягає в побудові матриці (1.12) за допомогою спочатку алгоритму виключення змінних, а потім – алгоритму діагоналізації.

## 1.6 Загальний розв'язок системи лінійних рівнянь

### ТЕОРЕМА 1.9.

Нехай  $\bar{x}_1 = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ,  $\bar{x}_2 = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  - два розв'язки системи (1.1). Тоді  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = (\lambda_1 - \mu_1, \lambda_2 - \mu_2, \dots, \lambda_n - \mu_n)$  буде розв'язком однорідної системи (6.7).

#### Доведення:

За означенням розв'язку лінійних рівнянь.

### ТЕОРЕМА 1.10.

Якщо  $\bar{x} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  - розв'язок системи (1.1), а  $\bar{y} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  - розв'язок системи (1.10), то  $\bar{x} + \bar{y} = (\lambda_1 + \gamma_1, \lambda_2 + \gamma_2, \dots, \lambda_n + \gamma_n)$  буде розв'язком однорідної системи (1.10).

#### Доведення:

За означенням розв'язку лінійних рівнянь.

### НАСЛІДОК

З останніх двох теорем випливає, що будь-який розв'язок системи лінійних рівнянь (1.1) може бути отриманий як сума деякого фіксованого розв'язку цієї системи і довільного розв'язку відповідної однорідної системи (1.10).

### Алгоритм розв'язання системи лінійних рівнянь

1. Побудувати розширену матрицю  $U$  системи лінійних рівнянь.



2. За допомогою алгоритму виключення змінних побудувати трикутну матрицю  $U'$ .
3. Визначити сумісність системи. Якщо система несумісна, закінчити розв'язання задачі.
4. Якщо система сумісна, визначити кількість її розв'язків.
5. Якщо система має єдиний розв'язок, привести матрицю  $U'$  до діагонального виду  $U''$ . Значення елементів останнього стовпця є розв'язком системи.
6. Якщо система має декілька розв'язків, то
  - видалити з матриці  $U'$  нульові рядки (якщо вони є);
  - привести матрицю  $U'$  до діагонального виду  $U''$ . Значення елементів останнього стовпця є частинних розв'язком системи  $\bar{y}$ ;
  - Визначити ранг  $r$  системи. Значення елементів  $n-r$  стовпців прямокутної частини матриці  $U''$  використати для побудови фундаментальної системи розв'язків відповідної однорідної системи  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-r}$ ;
  - Представити загальний розв'язок системи у вигляді

$$\bar{X} = \bar{y} + \alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_{n-r} \bar{x}_{n-r}$$

з невизначеними коефіцієнтами  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ .

## ЗАКЛЮЧНІ ЗАУВАЖЕННЯ

Багато практичних задач лінійної алгебри зводяться до розв'язання систем лінійних рівнянь. Тому практичні методи, викладені в цій главі, необхідні для подальшої практичної роботи. Вправи на застосування алгоритмів цієї глави містяться в заключній главі 11.

З іншого боку, в главі 6 ми розглянемо ще раз системи лінійних рівнянь, сформулювавши результати про структуру їх розв'язку мовою векторних просторів.

В цій главі ми користувалися термінами лінійної алгебри: *скаляр, вектор, матриця, лінійна комбінація* і таке інше. Означення цих понять будуть наведені в подальшому.

## Глава 2. Векторні простори

Сучасний підхід до означення векторного простору, як і до практично всіх сучасних математичних понять, є абстрактним. Векторні простори визначаються своїми властивостями. Ці властивості по суті є аксіомами. Теорія векторних просторів спирається лише на з ці аксіоматичні властивості. На практиці (тобто при розв'язанні практичних задач), звичайно, математик має справу з конкретними реалізаціями абстрактних (аксіоматичних) понять. Для лінійної алгебри це означає, що практичні задачі треба розв'язувати, працюючи з конкретними прикладами векторних просторів.

### 2.1. Означення векторного простору

Нехай задані деяке поле  $F$  і непуста множина  $V$ . Елементи поля  $F$  будемо позначати грецькими буквами  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  і називати скалярами. Елементи множини  $V$  будемо називати векторами і позначати малими латинськими буквами з ризикою (стрілкою) зверху:  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$

Припустимо, що на множині  $V$  визначена дія (операція) додавання векторів, тобто для кожної пари векторів  $\bar{a} \in V$ ,  $\bar{b} \in V$  знайдеться третій вектор  $\bar{c} \in V$ , який називається сумою векторів  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$ . Операцію додавання будемо позначати символом "+" і записувати результат додавання у вигляді:  $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ . Припустимо також, що визначена дія множення скалярів поля  $F$  на вектори множини  $V$  так, що отриманий в результаті множення елемент знову належить  $V$ , тобто є вектором. Якщо  $\alpha \in F$ ,  $\bar{a} \in V$ , то добуток  $\alpha$  на вектор  $\bar{a}$  будемо записувати у вигляді  $\alpha * \bar{a}$  або  $\alpha \bar{a}$ .

#### ОЗНАЧЕННЯ 2.1.

Непуста множина  $V$  з визначеними вище операціями додавання векторів і множення векторів на скаляри поля  $F$  називається векторним (лінійним) простором над полем  $F$ , якщо виконані наступні умови:

1)  $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ ;

- 2)  $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ ;
- 3) на множині  $V$  існує нульовий вектор, який позначається  $\bar{0}$ , і який має наступну властивість: для будь-якого вектора  $\bar{a} \in V$ ,  $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$ ;
- 4) для кожного вектора  $\bar{a} \in V$  існує протилежний вектор, який позначається через  $(-\bar{a})$ , і який в сумі з вектором  $\bar{a}$  дає нульовий вектор:  $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$ ;
- 5)  $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$ ;
- 6)  $(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$ ;
- 7)  $\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$ ;
- 8)  $1\bar{a} = \bar{a}$ , для будь якого вектора  $\bar{a} \in V$ .

Умови 1–4 означають, що векторний простір  $V$  є комутативною (абелевою) групою відносно операції додавання векторів.

Суму вектора  $\bar{a}$  і вектора, протилежного вектору  $\bar{b}$ , будемо називати різницею векторів  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  і позначати  $\bar{a} - \bar{b}$ .

## 2.2 Властивості векторних просторів

- 1) Якщо  $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$ , то  $\bar{a} = \bar{c} - \bar{b}$  (доданок можна переносити з однієї частини в іншу з протилежним знаком).

*Доведення:*

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$ , тому  $(\bar{a} + \bar{b}) + (-\bar{b}) = \bar{c} + (-\bar{b})$ ,  $\bar{a} + (\bar{b} + (-\bar{b})) = \bar{c} - \bar{b}$ ,  
 $\bar{a} + \bar{0} = \bar{c} - \bar{b}$ ,  $\bar{a} = \bar{c} - \bar{b}$ .

$$2) -(-\bar{a}) = \bar{a}.$$

*Доведення:*

$\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$ , звідси  $(-\bar{a}) + \bar{a} = \bar{0}$ , отже,  $\bar{a}$  є вектором протилежним вектору  $-\bar{a}$ , тобто  $\bar{a} = -(-\bar{a})$ .

- 3)  $0\bar{a} = \bar{0}$  для будь-якого  $\bar{a} \in V$ .

*Доведення:*

$\bar{a} = 1\bar{a}$  (в силу умови 8 означення 1.1). Тому  $\bar{a} = 1\bar{a} = (1 + 0)\bar{a} = 1\bar{a} + 0\bar{a} = \bar{a} + 0\bar{a}$ , звідси  $\bar{a} = \bar{a} + 0\bar{a}$ , або  $\bar{a} + (-\bar{a}) = 0\bar{a}$ ,  $\bar{0} = 0\bar{a}$ .

**4)**  $(-\alpha)\bar{a} = -(\alpha\bar{a})$ ; зокрема  $(-1)\bar{a} = -\bar{a}$ .

*Доведення:*

$\bar{0} = 0\bar{a}$  (вл.3); звідси  $\bar{0} = 0\bar{a} = (\alpha + (-\alpha))\bar{a} = \alpha\bar{a} + (-\alpha)\bar{a}$ , отже,  
 $(-\alpha)\bar{a} = -(\alpha\bar{a})$

**5)**  $(\alpha - \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} - \beta\bar{a}$ .

*Доведення:*

$(\alpha - \beta)\bar{a} = (\alpha + (-\beta))\bar{a} = \alpha\bar{a} + (-\beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + (-\beta\bar{a}) = \alpha\bar{a} - \beta\bar{a}$ .

**6)**  $\alpha(-\bar{b}) = -\alpha\bar{b}$ .

*Доведення:*

$\alpha(-\bar{b}) = \alpha((-1)\bar{b}) = ((-1)\alpha)\bar{b} = (-\alpha)\bar{b} = -\alpha\bar{b}$

**7)**  $\alpha(\bar{a} - \bar{b}) = \alpha\bar{a} - \alpha\bar{b}$ .

*Доведення:*

$\alpha(\bar{a} - \bar{b}) = \alpha(\bar{a} + (-\bar{b})) = \alpha\bar{a} + \alpha(-\bar{b}) = \alpha\bar{a} - \alpha\bar{b}$

**8)**  $\alpha\bar{0} = \bar{0}$  для будь-якого  $\alpha \in F$ .

*Доведення:*

$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{a} - \bar{a}) = \alpha\bar{a} + \alpha(-\bar{a}) = \alpha\bar{a} - \alpha\bar{a} = \bar{0}$

**9)** Якщо  $\alpha\bar{a} = \bar{0}$ , то або  $\alpha = 0$ , або  $\bar{a} = \bar{0}$ .

*Доведення:*

Якщо  $\alpha \neq 0$ , то в полі  $F$  існує обернений скаляр  $\alpha^{-1}$ . Тому  $\alpha^{-1}(\alpha\bar{a}) = (\alpha^{-1}\alpha)\bar{a} = 1\bar{a} = \bar{a}$ , з іншого боку  $\alpha^{-1}\bar{0} = \bar{0}$ , тобто  $\bar{a} = \bar{0}$ .

**10)** Методом математичної індукції легко довести, що

$$\alpha(\overline{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}) = \overline{\alpha a_1 + \alpha a_2 + \alpha a_3 + \dots + \alpha a_n};$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n)\overline{a} = \overline{\alpha_1 a + \alpha_2 a + \alpha_3 a + \dots + \alpha_n a}.$$

## 2.3. Приклади векторних просторів

### Приклад 2.1 Лінійні форми

Нехай  $\mathcal{Q}$  – поле раціональних чисел і  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – упорядкований набір змінних. Лінійною формою називається вираз виду  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ , де  $\alpha_i$  – довільні раціональні числа (тобто  $\alpha_i \in \mathcal{Q}$ ), а  $x_i \in X$ . Через  $W$  позначимо множину усіх лінійних форм із коефіцієнтами з поля  $\mathcal{Q}$ :

$$W = \{ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \mid \alpha_i \in \mathcal{Q}, x_i \in X \}$$

На множині  $W$  визначимо операції додавання лінійних форм і множення лінійної форми на скаляр - число з поля  $\mathcal{Q}$  наступним чином:

Якщо  $L_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ ,  $L_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$  то

$$L_1 + L_2 = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)x_n \text{ (додавання)}$$

$$\gamma * L_1 = (\gamma * \alpha_1)x_1 + (\gamma * \alpha_2)x_2 + \dots + (\gamma * \alpha_n)x_n \text{ (множення на скаляр)}$$

Ці означення можна сформулювати як правила обчислення наступним чином:

*Для того, щоб додати дві лінійні форми, треба додати коефіцієнти цих форм при відповідних змінних.*

*Для того, щоб помножити лінійну форму на скаляр, треба помножити всі коефіцієнти цієї форми на скаляр.*

Для того, щоб переконатися у тому, що множина  $W$  з визначеними діями додавання лінійних форм та множенням лінійної форми на скаляр, є векторним простором, треба перевірити, що всі рівності означення 1.1 є тотожностями на множині  $W$ .

- 1) Комутативність операції додавання є наслідком комутативності операції додавання раціональних чисел.

- 2) Асоціативність операції додавання є наслідком асоціативності операції додавання раціональних чисел.
- 3) Існування нульового вектору. Очевидно, що нульовим вектором є лінійна форма з нульовими коефіцієнтами:

$$L_0 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n$$

- 4) Існування протилежного вектору. Протилежною до лінійної форми  $L = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$  є форма  $L^- = (-\alpha_1)x_1 + (-\alpha_2)x_2 + \dots + (-\alpha_n)x_n$ , коефіцієнти якої протилежні відповідним коефіцієнтам форми  $L$ .

Властивості 1) -5) доводять, що множина  $W$  є абелевою групою відносно операції додавання лінійних форм. Наступні властивості відносяться до операції множення лінійної форми на скаляр.

- 5) Властивість  $\alpha(L_1 + L_2) = \alpha L_1 + \alpha L_2$  називають дистрибутивним законом множення на скаляр відносно додавання. Дистрибутивність множення на скаляр відносно додавання є також прямим наслідком дистрибутивності в полі раціональних чисел. Дійсно, доведемо її для  $i$ -тих членів лінійних форм  $L_1$  та  $L_2$  де  $i$  – довільний номер:

$$\alpha(\alpha_i x_i + \beta_i x_i) = \alpha(\alpha_i + \beta_i)x_i = (\alpha^* \alpha_i + \alpha^* \beta_i)x_i = (\alpha^* \alpha_i)x_i + (\alpha^* \beta_i)x_i$$

- 6) Властивість  $(\alpha + \beta)L = \alpha L + \beta L$  називають дистрибутивним законом множення на скаляр відносно додавання скалярів. Доведення цієї властивості цілком аналогічне попередньому.
- 7) Властивість  $\alpha(\beta L) = (\alpha\beta)L$  називають асоціативністю множення на скаляр. Доведення цієї властивості також аналогічне доведенню 7).
- 8) Нарешті, властивість  $1_Q \cdot L = L$  означає, що одиниця поля  $Q$  є нейтральним елементом операції множення на скаляр.

## Приклад 2.2 Направлені відрізки на площині

Нехай  $R$  – поле дійсних чисел. Зафіксуємо на геометричній площині  $\Pi$  точку  $P$ . Розглянемо сукупність  $S$  усіх направлених відрізків цієї площини виду  $PM$ , де  $P$  – зафіксована точка, а  $M$  – довільна точка площини.

$$S = \{PM \mid M \in \Pi\}$$

На множині  $S$  визначимо операції додавання направлених відрізків і множення направленого відрізка на скаляр - число з поля  $R$  наступним чином:

Якщо  $s_1 = PM_1$ ,  $s_2 = PM_2$  то  $s = s_1 + s_2 = PM_1 + PM_2$  – це направлений відрізок,  $PM$ , який є діагоналлю паралелограму, побудованого на відрізках  $PM_1$  та  $PM_2$  як на сторонах, що виходить з точки  $P$  (правило паралелограму).

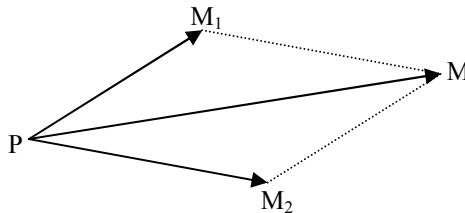


Рис 2.1 Правило паралелограму додавання направлених відрізків

Якщо  $s_1 = PM_1$ ,  $s = \alpha s_1 = \alpha PM_1$  – це направлений відрізок  $PM$ , розтягнутий в  $|\alpha|$  разів порівняно з відрізком  $PM_1$ . Напрямок  $PM$  співпадає з напрямком  $PM_1$ , якщо  $\alpha > 0$  та протилежний до напрямку  $PM_1$ , якщо  $\alpha < 0$ .

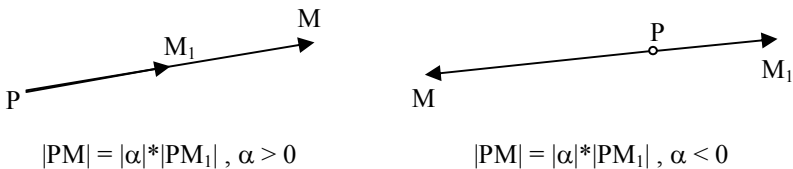


Рис 2.2 Правило множення направленого відрізка на дійсне число

Як і в першому прикладі, для того, щоб переконатися у тому, що множина  $S$  з визначеними діями додавання направлених відрізків та множенням направленого відрізка на скаляр, є векторним простором, треба перевірити, що всі

рівності означення 1.1 виконуються. Цю вправу ми пропонуємо читачеві.

### Приклад 2.3 Тривимірний арифметичний простір

Нехай  $R$ —поле дійсних чисел. Вектором арифметичного тривимірного простору назвемо упорядковану трійку дійсних чисел  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Через  $R_3$  позначимо множину векторів арифметичного тривимірного простору.

$$R_3 = \{ (\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in R \}$$

Визначимо на множині  $R_3$  операції додавання векторів та множення вектору на число наступним чином: для будь-яких векторів  $\mathbf{a}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  та дійсного числа  $\delta$

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)$$

$$\delta * \mathbf{a}_1 = (\delta * \alpha_1, \delta * \beta_1, \delta * \gamma_1)$$

Для того, щоб довести, що визначені таким чином операції перетворюють множину  $R_3$  у векторний простір, треба перевірити, що виконуються властивості 1) – 8) означення векторного простору.

## 2.4. Вправи

1. Визначимо множину  $W$  як сукупність всіх тричленів з дійсними коефіцієнтами, які мають корінь  $x = 1$ .

$$W = \{ p(x) = a * x^2 + b * x + c \mid a, b, c \in R, p(1) = 0 \}$$

На множині  $W$  задані звичайні операції додавання багаточленів та множення на дійсне число. Доведіть,  $W$  є векторним простором над полем дійсних чисел.

Які з наступних тричленів належать до векторного простору  $W$ ?

- $x^2 - 3 * x + 2$ ;
- $3 * x^2 - 5 * x + 3$ ;
- $-x^2 + x - 1$ ;
- $x^2 - 1$ ;
- $2 * x^2 - 4 * x + 5$ .



Сформулюйте умову належності тричлена векторному простору в термінах коефіцієнтів  $a, b, c$ .

2. Визначимо множину  $V$  як сукупність однорідних бінарних форм двох змінних з дійсними коефіцієнтами:

$$V = \{a \cdot x^2 + b \cdot xy + c \cdot y^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

На множині  $V$  задані звичайні операції додавання бінарних форм та множення на дійсне число. Доведіть,  $V$  є векторним простором над полем дійсних чисел.

3. Визначимо множину  $W$  як сукупність всіх фундаментальних послідовностей з раціональними членами.

$$W = \{A = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \mid A - \text{фундаментальна}\}$$

4. На множині  $W$  задані звичайні операції додавання послідовностей (почленне додавання) та множення на дійсне число (почленне множення). Доведіть, що  $W$  є векторним простором над полем раціональних чисел.

5. Визначимо множину  $F$  як сукупність всіх зростаючих функцій на числовій осі  $\mathbb{R}$ . Розглянемо на множині  $F$  операції додавання функцій і множення функції на дійсне число. Чи є множина  $F$  векторним простором? Якщо ні, які з властивостей означення векторного простору не виконуються?

6. Визначимо множину  $W$  як сукупність всіх тричленів з дійсними коефіцієнтами, які задовольняють співвідношенню  $a - 2 \cdot b + 3 \cdot c = 0$

$$W = \{p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a - 2 \cdot b + 3 \cdot c = 0\}$$

На множині  $W$  задані звичайні операції додавання багаточленів та множення на дійсне число. Чи є  $W$  векторним простором над полем дійсних чисел?

7. Визначимо множину  $W$  як сукупність всіх тричленів з дійсними коефіцієнтами, які задовольняють співвідношенню  $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$

$$W = \{p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}, b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0\}$$

На множині  $W$  задані звичайні операції додавання багаточленів та множення на дійсне число. Чи є  $W$  векторним простором над полем дійсних чисел?

8. Розглянемо сукупність  $S$  векторів тривимірного арифметичного простору (див. приклад 3) таких, що  $\alpha + \beta + \gamma = 0$

$$S = \{ (\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha + \beta + \gamma = 0 \}$$

Чи є  $S$  векторним простором над полем дійсних чисел?

9. Розглянемо сукупність  $S$  векторів тривимірного арифметичного простору (див. приклад 3) таких, що  $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$

$$S = \{ (\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 \}$$

Чи є  $S$  векторним простором над полем дійсних чисел?

10. Розглянемо сукупність  $S$  векторів тривимірного арифметичного простору (див. приклад 3) таких, що  $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$

$$S = \{ (\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, f(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \}$$

Якою повинна бути функція  $f$  для того, щоб множина  $S$  утворила векторний простір?

## 2.5 Лінійна залежність векторів

### ОЗНАЧЕННЯ 2.2

Система векторів  $\{ \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n} \}$  ( $n \geq 1$ ) називається лінійно залежною, якщо існує система скалярів  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ , з яких принаймні один не дорівнює нулю і для яких справедлива рівність:

$$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3} + \dots + \alpha_n \overline{a_n} = \overline{0} \quad (2.1)$$

Вираз  $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3} + \dots + \alpha_n \overline{a_n}$  будемо називати лінійною комбінацією векторів  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}$  а скаляри  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  — коефіцієнтами цієї лінійної комбінації. Якщо лінійна комбінація системи векторів дорівнює  $\overline{0}$ , то її називають нульовою лінійною комбінацією.

Відзначимо найпростіші властивості лінійно залежних систем векторів:

- 1) Система векторів, яка містить тільки один вектор  $\bar{a}$ , лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли  $\bar{a} = \bar{0}$ .

*Доведення:*

Якщо  $\bar{a} = \bar{0}$ , то при  $\alpha = 1$  маємо:  $1\bar{a} = 1\bar{0} = \bar{0}$ , тобто отримали нульову лінійну комбінацію, в якій є ненульовий коефіцієнт; отже, дана система лінійно залежна. Припустимо, що система  $\{\bar{a}\}$  лінійно залежна, тобто  $\alpha\bar{a} = \bar{0}$ , причому  $\alpha \neq 0$ . Тоді в силу властивості 9 векторних просторів  $\bar{a} = \bar{0}$ .

- 2) Система векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  при  $n > 1$  лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли хоча б один з цих векторів є лінійною комбінацією інших.

*Доведення:*

Якщо один з векторів даної системи, наприклад  $\bar{a}_1$ , дорівнює лінійній комбінації інших, то  $\bar{a}_1 = \beta_2 \bar{a}_2 + \beta_3 \bar{a}_3 + \dots + \beta_n \bar{a}_n$ . Звідси  $1\bar{a}_1 + (-\beta_2)\bar{a}_2 + (-\beta_3)\bar{a}_3 + \dots + (-\beta_n)\bar{a}_n = \bar{0}$  причому коефіцієнт при  $\bar{a}_1$  дорівнює одиниці, тобто відмінний від нуля.

Отже, дана система лінійно залежна. Припустимо тепер, що система векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$  лінійно залежна, це означає, що  $\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \alpha_3 \bar{a}_3 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n = \bar{0}$ , (2.2), причому хоча б один з коефіцієнтів  $\alpha_j$ , наприклад  $\alpha_1$ , не дорівнює 0;  $\alpha_1 \neq 0$ . З рівності (2.2) отримуємо:  $\alpha_1 \bar{a}_1 = (-\alpha_2)\bar{a}_2 + (-\alpha_3)\bar{a}_3 + \dots + (-\alpha_n)\bar{a}_n$ . Помноживши це співвідношення на  $\alpha_1^{-1}$  ( $\alpha_1^{-1} \neq 0$ ), отримаємо рівність:

$\bar{a}_1 = (-\alpha_2 \alpha_1^{-1})\bar{a}_2 + (-\alpha_3 \alpha_1^{-1})\bar{a}_3 + \dots + (-\alpha_n \alpha_1^{-1})\bar{a}_n$ . Отже,  $\bar{a}_1$  є лінійною комбінацією векторів  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n$ .

- 3) Якщо деяка непуста підсистема даної системи векторів лінійно залежна, то і вся система лінійно залежна.

*Доведення:*

Нехай задана система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  і припустимо, що деяка її підсистема з  $m$  векторів лінійно залежна ( $0 < m < n$ ). Дану систему векторів можна при необхідності перенумерувати так, щоб і її підсистема з перших  $m$  векторів була лінійно залежна. Таким чином,  $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3} + \dots + \alpha_m \overline{a_m} = \overline{0}$ , причому хоча б один з коефіцієнтів  $\alpha_j \neq 0$  (наприклад  $\alpha_1 \neq 0$ ).

Поклавши  $\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \dots = \alpha_n = 0$  отримаємо, що

$$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3} + \dots + \alpha_m \overline{a_m} + \alpha_{m+1} \overline{a_{m+1}} + \dots + \alpha_n \overline{a_n} = \overline{0}$$

причому  $\alpha_1 \neq 0$ . Отже задана система векторів лінійно залежна.

### ОЗНАЧЕННЯ 2.3.

Система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$ , ( $n > 1$ ) називається лінійно незалежною, якщо з рівності  $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3} + \dots + \alpha_n \overline{a_n} = \overline{0}$  випливає, що  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Таким чином, лінійна комбінація лінійно незалежної системи векторів є нульовою тоді і тільки тоді, коли всі її коефіцієнти дорівнюють 0.

### ЗАУВАЖЕННЯ.

Лінійна комбінація будь-якої системи векторів, в якій всі коефіцієнти дорівнюють 0, є нульовою. Якщо система немає інших нульових лінійних комбінацій, то вона лінійно незалежна. Лінійно залежна система має ще інші нульові лінійні комбінації.

## 2.6 Властивості лінійно незалежних систем векторів.

- 1) Лінійно незалежна система векторів не містить нульового вектора.

*Доведення:*

Якщо система векторів містить нульовий вектор, то її підсистема, яка складається з одного нульового вектора, лінійно залежна (властивість 1 лінійно залежних систем), а отже вся система

також лінійно залежна (властивість 3 лінійно залежних систем).  
Отримали протиріччя.

2) Якщо система векторів лінійно незалежна, то будь-яка її підсистема теж лінійно незалежна.

Доведення впливає з властивості 3 лінійно залежних систем.

## 2.7 Приклади

### Приклад 2.4

Розглянемо векторний простір  $W_3$  всіх лінійних форм від змінних  $x, y, z$  над полем дійсних чисел (див. Приклад 1.1.):

$$W = \{ \alpha x + \beta y + \gamma z \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q} \}$$

Поставимо питання про лінійну незалежність системи векторів (лінійних форм)

$$L_1 = 2x + 3y - 4z, \quad L_2 = -2x + 4y - 5z, \quad L_3 = -x + 6y + 2z$$

#### Розв'язання.

Складемо лінійну комбінацію  $L_1, L_2, L_3$  з (невизначеними) коефіцієнтами  $A, B, C$ :

$$A \cdot L_1 + B \cdot L_2 + C \cdot L_3 = 0$$

Підставляючи значення  $L_1, L_2, L_3$ , отримуємо:

$$A(2x + 3y - 4z) + B(-2x + 4y - 5z) + C(-x + 6y + 2z) = 0$$

Перетворимо отриману рівність, розкривши дужки та визначивши коефіцієнти при змінних  $x, y, z$ , Отримаємо:

$$(2A - 2B - C)x + (3A + 4B + 6C)y + (-4A - 5B + 2C)z = 0$$

Зауважимо, що в правій частині рівності  $0$  означає нульову лінійну форму, тобто форму з нульовими коефіцієнтами. Тому кожен з виразів при змінних  $x, y, z$  можна прирівняти нулю. Отримаємо систему лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів  $A, B, C$  як від невідомих:

$$2A - 2B - C = 0$$

$$3A + 4B + 6C = 0$$

$$-4A - 5B + 2C = 0$$

Питання про лінійну незалежність системи векторів зведено про питання, чи існує ненульовий розв'язок даної системи, тобто такий розв'язок, в якому хоча б один член не

дорівнює нулю. Якщо це так, система векторів лінійно залежна, якщо ж ні, система векторів лінійно незалежна.

Загальну теорію систем лінійних рівнянь викладено в главі 1.

Вирішивши систему, отримаємо її розв'язок:

$$A = 0, B = 0, C = 0.$$

Відповідно до означення лінійної незалежності, система векторів (лінійних форм) задачі є лінійно незалежною.

**Приклад 2.5.** Розглянемо арифметичний векторний простір  $R_3$  над полем дійсних чисел (див. Приклад 2.1.):

$$R_3 = \{ (\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \}$$

Виберемо в цьому просторі три конкретні вектори

$$\mathbf{a}_1 = (2, 3, 4), \quad \mathbf{a}_2 = (-2, 4, -5), \quad \mathbf{a}_3 = (6, 2, 13)$$

Треба визначити, чи є ця система лінійно залежною.

### Розв'язання.

Послідовність дій буде в точності такою ж, як і в попередньому прикладі:

Складемо лінійну комбінацію векторів з невизначеними коефіцієнтами  $A, B, C$ .

$$A \cdot \mathbf{a}_1 + B \cdot \mathbf{a}_2 + C \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$$

Підставимо в неї значення векторів  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ :

$$A(2, 3, 4) + B(-2, 4, -5) + C(6, 2, 13) = \mathbf{0}$$

Перетвореннями визначимо вектор – лінійну комбінацію лівої частини рівності:

$$(2A - 2B + 6C, 3A + 4B + 2C, 4A - 5B + 13C) = \mathbf{0}$$

Нульовий вектор простору  $R_3$  – це вектор  $(0, 0, 0)$ . Тому  $(2A - 2B + 6C, 3A + 4B + 2C, 4A - 5B + 13C) = (0, 0, 0)$

Прирівнявши по елементам ліву та праву частини рівності, отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$2A - 2B + 6C = 0,$$

$$3A + 4B + 2C = 0,$$

$$4A - 5B + 13C = 0.$$

Розв'язуємо цю систему методом елементарних перетворень.

$$2A - 2B + 6C = 0,$$

$$\begin{aligned} 3A + 4B + 2C &= 0, \\ 4A - 5B + 13C &= 0. \end{aligned}$$

Отримаємо систему:

$$\begin{aligned} 2A - 2B + 6C &= 0, \\ B - C &= 0, \\ -B + C &= 0. \end{aligned}$$

Або:

$$\begin{aligned} 2A - 2B + 6C &= 0, \\ B - C &= 0, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Рівність  $0 = 0$  з системи можна виключити.

$$\begin{aligned} 2A - 2B + 6C &= 0, \\ B - C &= 0. \end{aligned}$$

Система має безліч розв'язків. Один з них можна отримати, якщо покласти  $C = 1$ . Тоді  $B = 1$ ,  $A = -2$ . Отже, система векторів  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  є лінійно залежною. Можна вказати ненульові значення  $A, B, C$ , при яких відповідна лінійна комбінація є нульовою:

$$-2 \cdot \mathbf{a}_1 + 1 \cdot \mathbf{a}_2 + 1 \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}.$$

### ЗАУВАЖЕННЯ

При розв'язанні задачі ми отримали систему лінійних рівнянь, яка має безліч розв'язків. Загальні методи розв'язання таких систем викладені в главі 1. В нашому ж випадку третє рівняння виявилось вірною рівністю, тому розв'язки системи ми шукали, використовуючи тільки перші два рівняння. Висновок про існування безлічі розв'язків ми зробили тому, що змінній  $C$  можна надавати довільне значення, а потім обчислювати значення інших змінних.

### Приклад 2.3

Визначимо векторний простір  $W$  як сукупність всіх тричленів з дійсними коефіцієнтами.

$$W = \{ p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

з операціями додавання тричленів та множенням тричлену на дійсне число. Розглянемо три вектори

$$\mathbf{p}_1 = x^2 - 3x + 2, \quad \mathbf{p}_2 = x^2 - 1, \quad \mathbf{p}_3 = x^2 - 4x + 3.$$

В задачі треба визначити, чи можна виразити лінійно вектор  $\mathbf{p}_3$  через  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ ?

## Розв'язання

Як і в попередніх прикладах, складемо шукану рівність з невизначеними коефіцієнтами:

$$A \cdot \mathbf{p}_1 + B \cdot \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3$$

Якщо підставити в цю рівність значення  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{p}_3$  та застосувати той факт, що нульовим вектором є тричлен з нульовими коефіцієнтами, ми отримаємо систему лінійних рівнянь

$$A + B = 1 \quad // \text{прирівнюємо коефіцієнти при } x^2$$

$$-3A = -4 \quad // \text{прирівнюємо коефіцієнти при } x$$

$$2A - B = 3 \quad // \text{прирівнюємо вільні члени}$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо:  $A = 4/3$ ,  $B = -1/3$ .

Отже,  $\mathbf{p}_3 = 4/3 \cdot \mathbf{p}_1 - 1/3 \cdot \mathbf{p}_2$ .

**Зауваження.** Отримана система має три рівняння з двома змінними. При розв'язанні значення  $A$ ,  $B$  отримуються з перших двох рівнянь, а третє рівняння перетворилося при цьому в рівність.

## Приклад 2.6

Розглянемо систему векторів тривимірного арифметичного простору

$$\mathbf{a}_1 = (1, -3, 2), \quad \mathbf{a}_2 = (1, 0, -1), \quad \mathbf{a}_3 = (1, -4, 4).$$

В задачі треба визначити, чи можна виразити лінійно вектор  $\mathbf{a}_3$  через  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ?

## Розв'язання

Складемо лінійну комбінацію з невизначеними коефіцієнтами:

$$A \cdot \mathbf{a}_1 + B \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3$$

Якщо підставити в цю рівність значення  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$  та застосувати той факт, що нульовим вектором є вектор  $(0, 0, 0)$ , ми отримаємо систему лінійних рівнянь

$$A + B = 1$$

$$-3A = -4$$

$$2A - B = 4$$

Розв'язуючи цю систему, з перших двох рівнянь отримаємо:  $A = 4/3$ ,  $B = -1/3$ . Однак при підстановці цих значень в третє рівняння маємо невірну рівність  $3 = 4$ . Це означає, що



система розв'язків не має. Тому вектор  $\mathbf{a}_3$  не можна виразити лінійно через  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ .

## 2. 8 Вправи

1. Довести, що система векторів  $\{(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5)\}$  тривимірного арифметичного простору лінійно незалежна.

2. Нехай  $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  – система векторів деякого векторного простору над полем раціональних чисел. Довести, що  $S$  лінійно незалежна тоді і тільки тоді, коли система

$$S_1 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3\}$$

лінійно незалежна.

3. Розглянемо векторний простір  $W$  всіх тричленів з дійсними коефіцієнтами, які мають корінь  $x = 1$ .

$$W = \{p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}, p(1) = 0\}$$

Довести, що будь-яка система з трьох векторів в цьому просторі є лінійно залежною.

4. Розглянемо векторний простір  $V$  однорідних бінарних форм двох змінних з дійсними коефіцієнтами:

$$V = \{a \cdot x^2 + b \cdot xy + c \cdot y^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Довести, що в цьому векторному просторі можна виділити систему з трьох лінійно-незалежних векторів. Довести, що в цьому просторі будь-яка система 4-х векторів є лінійно-залежною.

## 2.9 Еквівалентні системи векторів.

### ОЗНАЧЕННЯ 2.4

Будемо казати, що система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}\}$  лінійно виражається через систему векторів  $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_m}\}$ , якщо будь-який вектор першої системи є лінійною комбінацією другої системи.

### ОЗНАЧЕННЯ 2.5

Дві системи векторів називаються еквівалентними, якщо кожна з них лінійно виражається через іншу.

### ЛЕМА 2.1

Якщо система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}\}$  лінійно виражається через систему векторів  $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_m}\}$ , яка лінійно виражається через систему  $\{\overline{c_1}, \overline{c_2}, \dots, \overline{c_r}\}$ , то перша система векторів лінійно виражається через третю.

Твердження леми 2.1 означає, що лінійна вираженість має транзитивну властивість.

### Доведення:

За умовою леми система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}\}$  лінійно виражається через систему  $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_m}\}$ . Це значить, що

$$\overline{a_i} = \beta_{i1} \overline{b_1} + \beta_{i2} \overline{b_2} + \dots + \beta_{im} \overline{b_m}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

Так само  $\overline{b_j} = \gamma_{j1} \overline{c_1} + \gamma_{j2} \overline{c_2} + \dots + \gamma_{jr} \overline{c_r}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$

Тому, підставляючи в (2.3) замість векторів  $\overline{b_k}$  їх вирази через вектора системи  $\{\overline{c_1}, \overline{c_2}, \dots, \overline{c_r}\}$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \overline{a_i} &= \beta_{i1} (\gamma_{11} \overline{c_1} + \gamma_{12} \overline{c_2} + \dots + \gamma_{1r} \overline{c_r}) + \\ &\beta_{i2} (\gamma_{21} \overline{c_1} + \gamma_{22} \overline{c_2} + \dots + \gamma_{2r} \overline{c_r}) + \dots \\ &+ \beta_{im} (\gamma_{m1} \overline{c_1} + \gamma_{m2} \overline{c_2} + \dots + \gamma_{mr} \overline{c_r}) = \\ &= (\beta_{i1} \gamma_{11} + \beta_{i2} \gamma_{21} + \dots + \beta_{im} \gamma_{m1}) \overline{c_1} + (\beta_{i1} \gamma_{12} + \beta_{i2} \gamma_{22} + \dots + \beta_{im} \gamma_{m2}) \overline{c_2} \\ &\dots + (\beta_{i1} \gamma_{1r} + \beta_{i2} \gamma_{2r} + \dots + \beta_{im} \gamma_{mr}) \overline{c_r} \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Отримані співвідношення означають, що система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}\}$  лінійно виражається через систему  $\{\overline{c_1}, \overline{c_2}, \dots, \overline{c_r}\}$ .

Лема доведена.

З леми 2.1 випливає, що поняття еквівалентності систем векторів також має транзитивну властивість. З означення еквівалентності систем векторів безпосередньо випливає, що це поняття має також рефлексивну та симетричну властивість.

## 2.10 Елементарні перетворення систем векторів

Нехай задана система векторів  $(A): \{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}\}$ ,  $n > 2$ .

Будемо по системі векторів  $(A)$  будувати нові системи векторів за допомогою деяких перетворень, які прийнято називати елементарними.

### ОЗНАЧЕННЯ 2.6.

Елементарними перетвореннями системи векторів  $(A) \{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}\}$ ,  $G_{111}$ , називають наступні операції:

1) Перестановка векторів  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$  (зміна нумерації векторів). За допомогою перетворення 1 система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}\}$  перетвориться в систему  $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_n}\}$ , де  $\overline{b_i} = \overline{a_j}$ ,  $j$ -один з номерів  $1, 2, \dots, n$  не обов'язково рівний  $i$ .

2) Множення вектора  $\overline{a_i}$  на скаляр  $\lambda \in F, \lambda \neq 0$ . За допомогою перетворення 2 система векторів  $(A)$  перетворюється в систему  $\{\overline{a_1}, \lambda \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}\}$  (вектор  $\overline{a_2} \in A$  помножили на скаляр  $\lambda$ ).

3) Множення вектора  $\overline{a_i}$  на число  $\lambda$ , додавання отриманого вектора до вектора  $\overline{a_j}, j \neq i$ , і заміна вектора  $\overline{a_j}$  сумою вказаних векторів. За допомогою перетворення 3 система векторів  $(A)$  перетворюється в систему  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3} + \lambda \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}\}$  (вектор  $\overline{a_2} \in A$  помножили на  $\lambda$ , додали отриманий вектор до вектора  $\overline{a_3}$  і замінили вектор  $\overline{a_3}$  на суму  $\overline{a_3} + \lambda \overline{a_2}$ ).

### ЛЕМА 2.2.

Якщо система векторів (B):  $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_n}\}$  отримана з системи (A):  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}\}$  за допомогою якого-небудь елементарного перетворення, то ці системи векторів еквівалентні.

#### Доведення:

У випадку елементарного перетворення 1 доведення леми очевидне.

Якщо система (B) отримана з системи (A) за допомогою перетворення 2, то  $\overline{b_j} = \lambda \overline{a_i}$ , для деякого  $j$ ,  $\lambda \neq 0$ . Для  $i \neq j$   
 $\overline{b_i} = 0\overline{a_1} + 0\overline{a_2} + \dots + 1\overline{a_i} + \dots + 0\overline{a_n}$ ; якщо  $i = j$ , то  
 $\overline{b_j} = 0\overline{a_1} + 0\overline{a_2} + \dots + \lambda \overline{a_j} + \dots + 0\overline{a_n}$ .

Таким чином, система (B) лінійно виражається через систему (A). Навпаки, при  $i \neq j$ ,  $\overline{a_i} = 1\overline{b_i}$ ; якщо  $i = j$ , то  $\overline{a_j} = \lambda^{-1} \overline{b_j}$  ( $\lambda \neq 0$ ); отже, система (A) також лінійно виражається через (B) і, значить, системи еквівалентні.

Нехай тепер система (B) отримана із (A) за допомогою перетворення 3 (наприклад,  $\overline{a_i} = \overline{b_i}$ ,  $i \neq 1$ ;  $\overline{b_1} = \overline{a_1} + \lambda \overline{a_j}$ ,  $j \neq 1$ ). Очевидно, що система (B) лінійно виражається через систему (A). Навпаки, так як при  $i \neq 1$ ,  $\overline{a_i} = \overline{b_i}$ , то  $\overline{a_1} = \overline{b_1} - \lambda \overline{a_j} = \overline{b_1} - \lambda \overline{b_j}$ . Звідси випливає, що система (A) лінійно виражається через (B) і в цьому випадку системи векторів еквівалентні.

### ЛЕМА 2.3.

Якщо система векторів (A):  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}\}$  лінійно незалежна, а система векторів (B):  $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_n}\}$  отримана з системи (A) в результаті одного з елементарних перетворень 1-3, то система векторів (B) також лінійно незалежна.

#### Доведення:

В разі перетворення 1 твердження очевидне.

Нехай (В) отримана з (А) за допомогою перетворення 2.

Припустимо, що  $\overline{b_j} = \lambda \overline{a_j}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Доведемо, що система векторів (В) лінійно незалежна. Розглянемо нульову комбінацію векторів системи (В):  $\beta_1 \overline{b_1} + \beta_2 \overline{b_2} + \dots + \beta_j \overline{b_j} + \dots + \beta_n \overline{b_n} = \overline{0}$ . Так як  $\overline{a_i} = \overline{b_i}$ ,  $i \neq j$ ,  $\overline{b_j} = \lambda \overline{a_j}$ , то

$$\beta_1 \overline{a_1} + \beta_2 \overline{a_2} + \dots + (\beta_j \lambda) \overline{a_j} + \dots + \beta_n \overline{a_n} = \overline{0}.$$

З лінійної незалежності системи (А) випливає, що  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_j \lambda = \dots = \beta_n = 0$ . Оскільки  $\lambda \neq 0$ , то  $\beta_j = 0$  для всіх  $i = 1, 2, \dots, n$ , і система (В) лінійно незалежна.

Нехай система (В) отримана з системи (А) за допомогою перетворення 3;  $\overline{b_j} = \overline{a_j} + \lambda \overline{a_i}$ ,  $i \neq j$ . Знову розглянемо нульову лінійну комбінацію векторів системи (В):

$$\beta_1 \overline{b_1} + \beta_2 \overline{b_2} + \dots + \beta_j \overline{b_j} + \dots + \beta_n \overline{b_n} = \overline{0}.$$

Зробивши підстановку  $\overline{b_j} = \overline{a_j} + \lambda \overline{a_i}$ ,  $i \neq j$ ,  $(- \overline{a_i})$  отримаємо:  $\beta_1 \overline{a_1} + \beta_2 \overline{a_2} + \dots + \beta_j (\overline{a_j} + \lambda \overline{a_i}) + \dots + \beta_n \overline{a_n} = \overline{0}$  або  $\beta_1 \overline{a_1} + \beta_2 \overline{a_2} + \dots + (\beta_i + \lambda \beta_j) \overline{a_i} + \dots + \beta_n \overline{a_n} = \overline{0}$ . З лінійної незалежності системи (А) отримаємо, що

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_i + \lambda \beta_j = \dots = \beta_n = 0.$$

Таким чином, всі  $\beta_s$ ,  $s \neq i$ , зокрема  $\beta_i = 0$ . Так як  $\beta_i + \lambda \beta_j = 0$ , то  $\beta_j = 0$ . Отже, система (В) лінійно незалежна. Лема доведена.

**ЛЕМА 2.4. (Штейниця)**

Якщо система векторів (А),  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_r}\}$  лінійно незалежна і лінійно виражається через систему векторів (В),  $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_s}\}$ , то  $r \leq s$ .

**Доведення:**

Доведення будемо проводити індукцією по числу елементів в системі (A).

Якщо число  $i = 1$ , то лема очевидна, тому, що система векторів (B) не може бути порожньою ( $\overline{a_i} \neq 0$ ). Припустимо, що лема доведена для  $i = m$  і доведемо її для  $i = m + 1$ . Так як система (A) лінійно виражається через систему (B), то  $\overline{a_i} = \alpha_{i1} \overline{b_1} + \alpha_{i2} \overline{b_2} + \dots + \alpha_{is} \overline{b_s}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m + 1$ .

В силу лінійної незалежності векторів системи (A),  $\alpha_i \neq 0$  і хоча б один з коефіцієнтів  $\alpha_{ij} \neq 0$ . Без обмеження загальності можна вважати, що  $\alpha_{11} \neq 0$ . Розглянемо систему векторів (C),  $\{\overline{c_1}, \overline{c_2}, \overline{c_3}, \dots, \overline{c_r}\}$ , де  $\overline{c_1} = \overline{a_1}$ ,  $\overline{c_j} = \overline{a_j} + (-\alpha_{j1} \alpha_{11}^{-1}) \overline{a_1}$ ,  $j > 1$ . Таким чином, система (C) лінійно виражається через систему (A), а значить і через систему (B):  $\overline{c_1} = \alpha_{11} \overline{b_1} + \alpha_{12} \overline{b_2} + \dots + \alpha_{1s} \overline{b_s}$ ,  $\overline{c_j} = \gamma_{j1} \overline{b_1} + \gamma_{j2} \overline{b_2} + \dots + \gamma_{js} \overline{b_s}$ ,  $j > 1$ , де  $\gamma_{ji} = \alpha_{ji} - \alpha_{j1} \alpha_{1i} \alpha_{11}^{-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ .

З цього отримуємо, що  $\gamma_{j1} = \alpha_{j1} - \alpha_{j1} \alpha_{11} \alpha_{11}^{-1} = \alpha_{j1} - \alpha_{j1} = 0$ .

Отже,

$$\overline{c_1} = \alpha_{11} \overline{b_1} + \alpha_{12} \overline{b_2} + \dots + \alpha_{1s} \overline{b_s}, \quad \overline{c_j} = \gamma_{j2} \overline{b_2} + \dots + \gamma_{js} \overline{b_s}, \quad j > 1 \quad (2.4)$$

Розглянемо ланцюжок систем векторів: (A)=(C<sub>1</sub>), (C<sub>2</sub>), ..., (C<sub>s-1</sub>), (C)=(C<sub>s</sub>), (C<sub>t</sub>)= $\{\overline{c_1}, \overline{c_2}, \dots, \overline{c_t}, \overline{a_{t+1}}, \dots, \overline{a_s}\}$ ,  $t = 1, 2, \dots, s-1$ .

Очевидно, система векторів (C<sub>t</sub>) отримана з системи (C<sub>t-1</sub>) заміною вектора  $\overline{a_t}$  на вектор  $\overline{c_t} = \overline{a_t} - \alpha_{t1} \alpha_{11}^{-1} \overline{a_1} = \overline{a_t} - \alpha_{t1} \alpha_{11}^{-1} \overline{c_1}$ .

Отже, система векторів (C<sub>t</sub>) отримана з системи векторів (C<sub>t-1</sub>) за допомогою елементарного перетворення 3. В силу лема 2.3, система векторів (C<sub>2</sub>) лінійно незалежна, тому що система (C<sub>1</sub>)=(A) лінійно незалежна за умовою лема. Аналогічно, застосовуючи лему 1.3, доведемо послідовно лінійну незалежність векторів (C<sub>3</sub>), (C<sub>3</sub>), ..., (C<sub>s-1</sub>), (C<sub>s</sub>)=(C).

Система (D),  $\{ \overline{c_2}, \overline{c_3}, \dots, \overline{c_r} \}$ , як підсистема лінійно незалежної системи векторів, буде сама лінійно незалежною (вл, 2 лінійно незалежних систем). З другого боку, система (D) лінійно виражається через систему (F),  $\{ \overline{b_2}, \overline{b_3}, \dots, \overline{b_s} \}$ , яка містить (s-1) векторів. Так як система (D) містить (r-1) вектор і (D) лінійно незалежна, то за припущенням індукції  $(r-1) \leq (s-1)$ , тобто  $\leq s$ . Лема доведена.

## Глава 3. Базис і розмірність векторного простору

### 3.1 Ранг системи векторів

Одним з основних понять теорії векторних просторів є поняття максимальної лінійно незалежної підсистеми системи векторів.

#### ОЗНАЧЕННЯ 3.1

Нехай дана скінчена або нескінченна підмножина векторів  $S \subset V$ , де  $V$  - векторний простір над полем  $F$ . Скінченна підмножина  $A = \{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_r}\}$ ,  $A \subset S$ , називається максимальною лінійно незалежною підсистемою на множині  $S$ , якщо виконані умови:

- 1) Система векторів (A) лінійно незалежна;
- 2) Якщо до системи (A) додати будь-який вектор  $\overline{b} \in S$ , то система  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_r}, \overline{b}\}$  буде лінійно залежною.

#### ЛЕМА 3.1

Якщо A - максимальна лінійно незалежна підсистема на множині векторів S, то будь-який вектор  $\overline{b} \in S$  можна єдиним чином представити у вигляді лінійної комбінації векторів системи (A),  $A = \{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_r}\}$ .

*Доведення:*

За означенням максимальної лінійно незалежної підсистеми, система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_r}, \overline{b}\}$  лінійно залежна. Це значить, що

$$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \dots + \alpha_r \overline{a_r} + \beta \overline{b} = \overline{0}, \quad (3.1)$$

причому, хоча б один з коефіцієнтів  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$  не дорівнює нулю. Доведемо, що в цьому випадку  $\beta \neq 0$ . Якщо це не так, тобто  $\beta = 0$ , то  $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \dots + \alpha_r \overline{a_r} = \overline{0}$  і з лінійної



незалежності системи (A) впливає, що  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$ . Так як  $\beta = 0$ , то всі коефіцієнти лінійної комбінації у співвідношенні (3.1) рівні нулю, а це протирічить припущенню. Отже,  $\beta \neq 0$ . Тоді з рівності (3.1) отримали:

$$\begin{aligned}\beta \bar{b} &= -\alpha_1 \bar{a}_1 - \alpha_2 \bar{a}_2 - \dots - \alpha_r \bar{a}_r, \text{ або} \\ \bar{b} &= (-\alpha_1 \beta^{-1}) \bar{a}_1 + (-\alpha_2 \beta^{-1}) \bar{a}_2 + \dots + (-\alpha_r \beta^{-1}) \bar{a}_r, \\ \bar{b} &= \gamma_1 \bar{a}_1 + \gamma_2 \bar{a}_2 + \dots + \gamma_r \bar{a}_r\end{aligned}\quad (3.2),$$

де  $\gamma_i = -\alpha_i \beta^{-1}$ .

Перша частина твердження доведена. Для доведення єдиності представлення (3.2) потрібно встановити, що якщо в системі коефіцієнтів  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$  хоча б для одного  $i$ ,  $\lambda_i \neq \gamma_i$ , то  $\bar{b} \neq \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_r \bar{a}_r$ . Отже, нехай наприклад,  $\lambda_1 \neq \gamma_1$ , але  $\bar{b} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_r \bar{a}_r$ . Тоді  $\bar{0} = \bar{b} + (-\bar{b}) = \gamma_1 \bar{a}_1 + \gamma_2 \bar{a}_2 + \dots + \gamma_r \bar{a}_r - (\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_r \bar{a}_r) = (\gamma_1 - \lambda_1) \bar{a}_1 + (\gamma_2 - \lambda_2) \bar{a}_2 + \dots + (\gamma_r - \lambda_r) \bar{a}_r$  причому  $\gamma_1 - \lambda_1 \neq 0$ , це неможливо, тому що система векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_r\}$  лінійно незалежна. Отримане протиріччя доводить єдиність представлення (3.2). Лема доведена повністю.

### Наслідок 3.1

Якщо  $S$  – довільна множина векторів у просторі  $V$  над полем  $F$  і  $A$  – його максимальна лінійно незалежна підсистема, то будь-яка підмножина  $T \subset S$  лінійно виражається через систему  $A$ .

### Наслідок 3.2

Якщо  $A$  і  $B$  дві максимально лінійно незалежні підсистеми векторів на множині  $S$ , то кількість векторів системи  $A$  дорівнює кількості векторів системи  $B$ .

### Доведення:

Позначимо через  $m$  і  $n$  кількість векторів відповідно в системах  $A$  і  $B$ . В силу наслідку 3.1, система векторів  $A$  лінійно

виражається через систему векторів  $B$ . Так як  $A$  - лінійно незалежна система, то за лемою Штейниця,  $m \leq n$ . Замінивши в цьому міркуванні місцями системи  $A$  і  $B$ , отримаємо, що  $n \leq m$ . Отже,  $m = n$ . Таким чином, кількість векторів у будь-якій максимально лінійно незалежній підсистемі з множини  $S$  одна і та ж. Це виправдовує означення, які наведені нижче.

### ОЗНАЧЕННЯ 3.2.

Векторний простір  $V$  над полем  $F$  називається скінченно-мірним, якщо в ньому існує максимальна лінійно незалежна підсистема.

В подальшому всі розглянуті векторні простори будуть вважатися скінченно-мірними. З лем 2.4 і 3.1 випливає, що будь-яка підсистема векторів скінченно-мірного векторного простору має максимальну лінійно незалежну підсистему.

### ОЗНАЧЕННЯ 3.3.

Рангом множини  $S$  називають число векторів в будь-якій максимальній лінійно незалежній підсистемі з множини  $S$ .

## 2.2 Базис і розмірність векторного простору

### ОЗНАЧЕННЯ 3.4.

Базисом скінченно-мірного векторного простору  $V$  називається будь-яка максимальна лінійно незалежна підсистема у просторі  $V$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 3.5.

Розмірністю скінченно-мірного векторного простору  $V$  називається число векторів в будь-якому базисі цього простору (тобто ранг множини векторів  $V$ ).

Розмірність векторного простору  $V$  будемо позначати через  $\dim V$ , а ранг системи векторів  $S$  – через  $r(S)$ .

### ЛЕМА 3.2.

Якщо система векторів  $S_1$  лінійно виражається через систему векторів  $a_{rs}$ , то ранг системи  $a_{ij}$  не перебільшує рангу  $a_{ij}$ .

#### Доведення:

Позначимо через  $A_1$  і  $A_2$  максимальні лінійно незалежні підсистеми в системах  $S_1$  і  $S_2$  відповідно. Оскільки система  $S_1$  лінійно виражається через  $S_2$ , то в силу леми 1.1,  $S_1$  лінійно виражається через  $A_2$ . Так як  $A_1 \subset S_1$ , то лінійно незалежна система векторів  $A_1$  лінійно виражається через систему  $A_2$ . В силу леми Штейниця, кількість векторів в системі  $A_1$  (ранг системи  $S_1$ ) не перевищує кількості векторів в системі  $A_2$  (ранг системи  $S_2$ ). Таким чином, ранг системи  $S_1$  не перевищує ранг системи  $S_2$ .

### НАСЛІДОК 3.3.

Ранги еквівалентних систем векторів рівні між собою.

В зв'язку з поняттям максимальної лінійно незалежної підсистеми векторів виникає питання про практичне відшукування такої підсистеми для заданої множини векторів. У вирішенні цього питання може бути корисною наступна лема:

### ЛЕМА 3.3.

Якщо  $A = \{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_m}\}$  лінійно незалежна підсистема векторів на множині  $S$ , то існує максимально лінійно незалежна підсистема  $B$  векторів з  $S$ , яка містить в собі  $A$ .

#### Доведення:

Позначимо через  $r$  ранг множини векторів  $S$  і нехай  $C$  - довільна максимальна лінійно незалежна підсистема з  $S$ . Так як  $A$  лінійно незалежна система, яка лінійно виражається через систему  $C$ , то  $m \leq r$ . Якщо  $m = r$ , то система векторів  $A$  - максимальна лінійно незалежна підсистема в  $S$ , інакше в  $S$

існувала б лінійно незалежна система, яка містила б  $m+1 = +1$  вектор, що неможливо (наслідок 3.2). В цьому випадку припустимо  $B = A$ , і лема доведена. Якщо  $m < r$ , то система  $A$ , в силу наслідку 3.2 не може бути максимальною лінійно незалежною підсистемою. Тому існує в  $S$  лінійно незалежна підсистема  $A_1 \supset A$ , причому кількість векторів в системі  $A_1$  дорівнює  $m+1$ . Якщо  $m+1 = r$ , то  $A$  - максимальна лінійно незалежна підсистема,  $B = A_1 \supset A$ , і твердження леми доведене. Міркуючи таким чином, отримаємо ланцюжок лінійно незалежних підсистем  $A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_k$ , причому число векторів в системі  $A_i$  дорівнює  $m + i$ . При  $k = r - m$  отримаємо максимальну лінійно незалежну підсистему. Поклавши  $B = A_{r-m}$ , отримаємо ствердження леми.

#### НАСЛІДОК 3.4.

Будь-яка лінійно незалежна система векторів в скінченномірному векторному просторі може бути доповнена до базису всього простору.

В подальшому буде потрібна ще одна лема.

#### ЛЕМА 3.4.

Нехай  $S = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ ,  $T = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n\}$  дві скінченні системи векторів, які містять однакову кількість векторів. Якщо з будь-якого співвідношення  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{a}_i = \bar{0}$  випливає співвідношення  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{b}_i = \bar{0}$ , то  $r(T) \leq r(S)$ .

#### Доведення:

Припустимо, що ранг системи векторів  $T$  дорівнює  $k$ ,  $k \leq n$ , і  $\{\bar{b}_{s(1)}, \bar{b}_{s(2)}, \dots, \bar{b}_{s(k)}\}$  - максимальна лінійно незалежна підсистема системи  $T$ ; тут  $S$  - ін'єктивне відображення множини  $\{1, 2, \dots, k\}$  на множину  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  $k \leq n$ . Доведемо, що  $S_1 = \{\bar{a}_{s(1)}, \bar{a}_{s(2)}, \dots, \bar{a}_{s(k)}\}$  - також лінійно незалежна система

векторів. Для цього необхідно встановити рівність нулю всіх коефіцієнтів в довільній нульовій лінійній комбінації векторів системи  $S_1$ .

Нехай  $\sum_{i=1}^k \mu_{s(i)} \bar{a}_{s(i)} = \bar{0}$ . Тоді  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{a}_j = \bar{0}$ , де  $\lambda_j = \mu_{s(i)}$ , якщо  $j = s(i)$ ,  $\lambda_j = 0$ , якщо  $j \neq s(i)$  ні для якого  $i=1, 2, \dots, k$ . За умовою леми  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{b}_j = \bar{0}$ , тобто  $\sum_{i=1}^k \mu_{s(i)} \bar{b}_{s(i)} = \bar{0}$ . Звідси випливає, що  $\mu_{s(i)} = 0$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ , оскільки  $\{\bar{b}_{s(1)}, \bar{b}_{s(2)}, \dots, \bar{b}_{s(k)}\}$  - лінійно незалежна система векторів. Отже  $S_{(1)}$  лінійно не залежна,  $S_{(1)} \subset S$ . Таким чином,  $r(T) = k = r(S_1) \leq r(S)$ , що і треба було довести.

### ОЗНАЧЕННЯ 3.6.

Нехай  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  - базис векторного простору розмірності  $n$  над полем  $F$ . Координатами вектора  $\bar{b} \in V$  в базисі  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  називається система елементів  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  з поля  $F$  таких, що  $\bar{b} = \beta_1 \bar{a}_1 + \beta_2 \bar{a}_2 + \dots + \beta_n \bar{a}_n$ .

В силу леми 3.1, координати вектора  $\bar{b}$  в базисі  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  однозначно визначені, і навпаки, вектор  $\bar{b}$  повністю визначений, якщо задані його координати в деякому базисі.

Якщо вектор  $\bar{b}$  має координати  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  в деякому базисі, то  $\bar{b}$  будемо записувати у вигляді  $\bar{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ .

### ЛЕМА 3.5.

Координати суми (різниці) двох векторів  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  рівні сумам (різницям) відповідних координат цих векторів; координати добутку вектора  $\bar{a}$  на скаляр  $\lambda$  дорівнює добутку відповідних координат вектора  $\bar{a}$  на скаляр  $\lambda$ .

Іншими словами, якщо  $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $\bar{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ , то  $\bar{a} \pm \bar{b} = (\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \dots, \alpha_n \pm \beta_n)$ ,  $\lambda \bar{a} = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n)$ .

#### Доведення:

Доведемо, наприклад, що  $\bar{a} \pm \bar{b} = (\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \dots, \alpha_n \pm \beta_n)$ .

Так як  $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $\bar{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ , то

$\bar{a} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n$ ; тому:

$$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} &= (\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n) + (\beta_1 \bar{a}_1 + \beta_2 \bar{a}_2 + \dots + \beta_n \bar{a}_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) \bar{a}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \bar{a}_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) \bar{a}_n \end{aligned}$$

Звідси отримаємо, що  $\bar{a} + \bar{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ .

Тут  $\bar{a}_i = \alpha_{i1} \bar{b}_1 + \alpha_{i2} \bar{b}_2 + \dots + \alpha_{is} \bar{b}_s$  - базис простору  $V$ .

Інші співвідношення доводяться аналогічно.

### ПРИКЛАД 3.1.

Нехай  $F$  - довільне поле і  $n$ -деяке натуральне число. Розглянемо декартовий добуток  $F^n = F \times F \times \dots \times F$ , в якому кількість множників дорівнює  $n$ . Елементами множини  $F^n$  є набори з  $n$  скалярів поля  $F$ ; якщо  $a \in F^n$ , то  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . На множині  $F^n$  визначимо структуру векторного простору над полем  $F$ , таким чином: якщо  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ , то покладемо

$$\begin{aligned} a + b &= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n), \\ \lambda a &= (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n). \end{aligned}$$

Елемент  $a + b$  назвемо сумою елементів  $a$  і  $b$ , а  $\lambda a$  - добутком скаляра  $\lambda$  на елемент  $a$ .

Безпосередньою перевіркою можна впевнитись, що визначені таким чином дії додавання і множення на скаляр задовольняють всім аксіомам векторного простору. Таким чином,  $F^n$  - векторний простір над полем  $F$ .

Легко впевнитись також, що множина  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ , де  $\bar{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $\bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $\bar{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ , є базисом простору  $F^n$ . Таким чином,  $F^n$ - простір має розмірність  $n$ . Якщо  $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , то  $\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$ . Отже,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  - координати вектора  $\bar{a}$  у вказаному базисі.

### 3.3 Ізоморфні відображення векторних просторів

Нехай  $V$  - векторний простір розмірності  $n$  над деяким полем  $F$  і  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  - деякий його базис. Означимо відображення  $\varphi$  простору  $V$  в  $F^n$  по наступному правилу: для  $\bar{b} \in V$  покладемо  $\varphi(\bar{b}) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in F^n$ ;  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  - координати вектора  $\bar{b}$  в базисі  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ .

З леми 3.5 випливає, що  $\varphi(\bar{b} + \bar{c}) = \varphi(\bar{b}) + \varphi(\bar{c})$ ,  $\varphi(\lambda \bar{b}) = \lambda \varphi(\bar{b})$ . Крім того, очевидно відображення  $\varphi$  є бієктивним.

#### ОЗНАЧЕННЯ 3.7.

Два векторних простори  $U$  і  $V$  над одним і тим же полем  $F$  називаються ізоморфними, якщо існує бієктивне відображення  $\varphi$  простору  $U$  в простір  $V$ , яке задовольняє умовам:

- 1)  $\varphi(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b})$  для будь-яких векторів  $\bar{a} \in U$ ,  $\bar{b} \in U$ ,
- 2)  $\varphi(\lambda \bar{a}) = \lambda \varphi(\bar{a})$  для будь-якого  $\bar{a} \in U$  і будь-якого  $\lambda \in F$ .

Відображення  $\varphi$  називають ізоморфізмом.

### 3.4 Властивості ізоморфного відображення.

- 1)  $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$  (тут одним і тим самим символом  $\bar{0}$  позначені нульовий вектор простору  $U$  і нульовий вектор простору  $V$ ). Насправді  $\varphi(\bar{0}) = \varphi(0a) = 0\varphi(a) = \bar{0}$ , тут  $a$  - довільний вектор з простору  $U$ .
- 2)  $\varphi(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}) = \alpha\varphi(\bar{a}) + \beta\varphi(\bar{b})$ . З умови 1 означення ізоморфних просторів випливає, що  $\varphi(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}) = \alpha\varphi(\bar{a}) + \beta\varphi(\bar{b})$ ; з умови 2  $\varphi(\alpha\bar{a}) = \alpha\varphi(\bar{a})$  і  $\varphi(\beta\bar{b}) = \beta\varphi(\bar{b})$ , звідки і отримуємо необхідну властивість.
- 3)  $\varphi(\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \dots + \alpha_n\bar{a}_n) = \alpha_1\varphi(\bar{a}_1) + \alpha_2\varphi(\bar{a}_2) + \dots + \alpha_n\varphi(\bar{a}_n)$  цю властивість легко може бути отримана методом математичної індукції з властивості 2.
- 4) Система векторів  $\{\varphi(\bar{a}_1), \varphi(\bar{a}_2), \dots, \varphi(\bar{a}_n)\}$  векторного простору  $V$  лінійно незалежна тоді і тільки тоді, коли лінійно незалежна система векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  в просторі  $U$ .

#### Доведення:

Припустимо спочатку, що система  $\{\varphi(\bar{a}_1), \varphi(\bar{a}_2), \dots, \varphi(\bar{a}_n)\}$  лінійно незалежна. Нам потрібно довести, що система векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  також лінійно незалежна.

Припустимо протилежне. Тоді існує система скалярів  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , з яких хоча б один не дорівнює нулю, така, що  $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \dots + \alpha_n\bar{a}_n = \bar{0}$ . Тоді  $\varphi(\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \dots + \alpha_n\bar{a}_n) = \varphi(\bar{0})$ . Застосовуючи властивості 1 і 3 ізоморфних відображень, отримаємо:  $\alpha_1\varphi(\bar{a}_1) + \alpha_2\varphi(\bar{a}_2) + \dots + \alpha_n\varphi(\bar{a}_n) = \bar{0}$ , що протирічить лінійній незалежності системи  $\{\varphi(\bar{a}_1), \varphi(\bar{a}_2), \dots, \varphi(\bar{a}_n)\}$ .

Отримане протиріччя доводить першу частину твердження.

Нехай тепер система векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  - лінійно незалежна. Припустимо, що система векторів



$\{\overline{\varphi(a_1)}, \overline{\varphi(a_2)}, \dots, \overline{\varphi(a_n)}\}$  лінійно залежна. Тоді

$$\alpha_1 \overline{\varphi(a_1)} + \alpha_2 \overline{\varphi(a_2)} + \dots + \alpha_n \overline{\varphi(a_n)} = \overline{0}, \text{ причому не всі } a_i = 0.$$

За властивістю 3 ізоморфних відображень ліва частина останньої рівності дорівнює  $\overline{\varphi(\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \dots + \alpha_n \overline{a_n})}$ , а права частина дорівнює  $\overline{\varphi(0)}$ . В силу бієктивності відображення  $\varphi$ ,  $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \dots + \alpha_n \overline{a_n} = \overline{0}$ , що неможливо, так як за умовою система векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}\}$  лінійно незалежна.

Властивість 4 повністю доведена.

### ТЕОРЕМА 3.1.

Для того, щоб два векторних простори  $U$  і  $V$  над одним і тим же полем  $F$  були ізоморфними необхідно і достатньо, щоб розмірності просторів  $U$  і  $V$  співпадали.

*Доведення:*

*Необхідність.*

Припустимо, що простори  $U$  і  $V$  ізоморфні, і  $\varphi$  - ізоморфне відображення  $U$  на  $V$ . Якщо  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}\}$  - базис простору  $U$ , то система векторів  $\{\overline{\varphi(a_1)}, \overline{\varphi(a_2)}, \dots, \overline{\varphi(a_n)}\}$  в просторі  $V$  лінійно незалежна в силу властивості 4. Припустимо, що ця система не є базисом простору  $V$ . Тоді в просторі  $V$  існує вектор  $\overline{y}$ , такий, що система векторів  $\{\overline{\varphi(e_1)}, \overline{\varphi(e_2)}, \dots, \overline{\varphi(e_n)}\}$  лінійно незалежна. В силу сюр'єктивності відображення  $\varphi$ ,  $\overline{y} = \overline{\varphi(\overline{a})}$ , для деякого вектора  $\overline{a} \in U$ . Таким чином, система векторів  $\{\overline{\varphi(e_1)}, \overline{\varphi(e_2)}, \dots, \overline{\varphi(e_n)}\}$  лінійно незалежна. За властивістю 4, система  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}, \overline{a}\}$  також лінійно незалежна. Це неможливо, так як  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}\}$  базис простору  $U$ . Таким чином, система векторів  $\{\overline{\varphi(e_1)}, \overline{\varphi(e_2)}, \dots, \overline{\varphi(e_n)}\}$  -

максимальна лінійно незалежна система векторів простору  $V$ , тобто його базис. Тому розмірності просторів  $U$  і  $V$  співпадають (обидві дорівнюють  $n$ ).

*Достатність.*

Припустимо, що розмірності просторів  $U$  і  $V$  співпадають. Нехай  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  - деякий базис простору  $U$ , а  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  - деякий базис простору  $V$ . Якщо  $\bar{x}$  - довільний вектор простору  $U$ , то  $\bar{x} = \gamma_1 \bar{e}_1 + \gamma_2 \bar{e}_2 + \dots + \gamma_n \bar{e}_n$ . Нехай  $\varphi(\bar{x}) = \gamma_1 \bar{f}_1 + \gamma_2 \bar{f}_2 + \dots + \gamma_n \bar{f}_n$ ,  $\bar{f} \in V$ . Тим самим визначили відображення  $\varphi$  простору  $U$  в простір  $V$ . Отже, відображення  $\varphi$  переводить вектор  $\bar{x} \in U$ , з координатами  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  в вектор  $\bar{y}$  простору  $V$  з тими ж координатами в базисі  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ . З цього зауваження і з леми 2.5 випливає, що  $\varphi(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b})$ ,  $\varphi(\lambda \bar{a}) = \lambda \varphi(\bar{a})$  для будь-яких векторів  $\bar{a} \in U$ ,  $\bar{b} \in U$  і довільного  $\lambda \in F$ . Якщо  $\varphi(\bar{a}) = \varphi(\bar{b})$ , то відповідні координати векторів  $\varphi(\bar{a})$  і  $\varphi(\bar{b})$  співпадають. Це означає, що відповідні координати векторів  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  також рівні, і  $\bar{a} = \bar{b}$ . Таким чином, відображення  $\varphi$  ін'єктивне. Якщо  $\bar{y}$  довільний вектор простору  $V$  з координатами  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  в базисі  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ , то  $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$ , де  $\bar{x}$  - вектор з координатами  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ . Отже, відображення  $\varphi$  - сюр'єктивне. Враховуючи все сказане, отримуємо, що  $\varphi$  - ізоморфне відображення простору  $U$  на простір  $V$ .

Теорема повністю доведена.

З цієї теореми легко випливає, що відношення ізоморфності векторних просторів рефлексивне, симетричне і транзитивне, тобто є відношенням еквівалентності.

З прикладу, розглянутого на початку цього параграфа, випливає, що векторний простір  $V$  розмірності  $n$  над полем  $F$  ізоморфний  $F^n$ . Якщо  $F=R$ ,  $R$  - поле дійсних чисел, то векторний простір  $R^n$  називають  $n$ -мірним векторним арифметичним простором. Таким чином, будь-який  $n$ -мірний векторний простір над полем дійсних чисел  $R$  ізоморфний  $n$ -мірному арифметичному простору.

Якщо відійти від конкретної природи векторів, з яких складається векторний простір  $V$ , а враховувати тільки ті їх властивості, які пов'язані з діями додавання векторів і множення векторів на скаляри, то ізоморфні векторні простори не розрізняються. Тому можна сказати, що з точністю до позначень ізоморфні векторні простори співпадають.

#### *Зауваження*

Якщо поле  $F$  є полем лишків кільця цілих чисел за модулем  $P(F = Z_p)$ , то векторний простір  $F^n$  містить  $P^n$  елементів. Так як довільний  $n$ -мірний векторний простір  $U$  над полем  $Z_p$  ізоморфний простору  $Z_p^n$ , а ізоморфне відображення  $\varphi$  простору  $U$  на  $Z_p^n$  бієктивне, то простір  $U$  містить  $p^n$  елементів. Отже,  $n$ -мірний векторний простір над полем  $Z_p$  скінчений і складається з  $n$  елементів.

### 3.5 Підпростори

#### **ОЗНАЧЕННЯ 3.8.**

Непуста множина  $W$  векторного простору  $V$  над полем  $F$  називається підпростором простору  $V$ , якщо  $W$  є векторним простором над полем  $F$  відносно дій додавання векторів і добутку вектора на скаляр, визначених в просторі  $W$ .

#### **ТЕОРЕМА 3.2.**

Для того, щоб непуста підмножина  $W$  векторного простору  $V$  над полем  $F$  була підпростором простору  $V$ , необхідно і достатньо, щоб для будь-яких векторів  $\bar{a} \in W$ ,  $\bar{b} \in W$  і будь-якого скаляра  $\lambda \in F$  вектори  $\bar{a} + \bar{b}$  і  $\lambda \bar{a}$  належали б  $W$ .

*Доведення:*

*Необхідність.*

Якщо  $W$ - підпростір простору  $V$ , то  $W$  разом з будь-якими двома векторами  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  повинен містити і вектор  $\bar{a} + \bar{b}$ . Насправді,  $W$ , за означенням, є векторним простором над полем  $F$ , причому сума векторів в просторі  $W$  співпадає з їх сумою в просторі  $V$ . Отже,  $\bar{a} + \bar{b} \in W$  і  $\lambda \bar{a} \in W$  для будь-якого  $\bar{a} \in W$  і  $\lambda \in F$ . Необхідність доведена.

*Достатність.*

Нехай для будь-яких векторів  $\bar{a} \in W$ ,  $\bar{b} \in W$  і будь-якого скаляра  $\lambda \in F$  вектори  $\bar{a} + \bar{b}$  і  $\lambda \bar{a}$  належать  $W$ . Отже, на множині  $W$  визначені дії додавання векторів і множення векторів на скаляри поля  $F$ . Властивості 1-8 цих операцій з означення векторного простору виконуються, тому що вони виконуються на всій множині  $V$ , частиною якої є  $W$ . Теорема повністю доведена.

**ОЗНАЧЕННЯ 3.9.**

Нехай  $V$  - векторний простір над полем  $F$  і  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  - скінченна система векторів з простору  $V$ . Лінійною оболонкою системи векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  називається множина всіх можливих лінійних комбінацій векторів цієї системи.

Лінійну оболонку векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  будемо позначати символом

$$L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) = \{\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n, \alpha_i \in F, i = 1, 2, \dots, n\}$$

**ЛЕМА 3.6**

Лінійна оболонка системи векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}\}$ ,  $\overline{a_i} \in W$ , співпадає з лінійною оболонкою максимальної лінійно незалежної підсистеми  $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_k}\}$  цієї системи.

*Доведення:*

Очевидно  $L(\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_k}) \subseteq L(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n})$ , тому що  $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_k}\} \subseteq \{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}\}$ . З іншої сторони, довільний вектор  $\overline{x} \in L(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n})$  є лінійною комбінацією векторів  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ , а кожен вектор  $\overline{a_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , є лінійною комбінацією векторів  $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_k}$  (лема 3.1). В силу леми 3.1,  $\overline{x}$  є лінійною комбінацією  $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_k}$ , тобто  $\overline{x} \in L(\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_k})$ .

Таким чином,  $L(\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_k}) \supseteq L(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n})$ . Враховуючи обернене включення, отримуємо, що

$$L(\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_k}) = L(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}).$$

Лема доведена.

### ТЕОРЕМА 3.3

Лінійна оболонка системи векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}\}$  векторного простору  $V$  над полем  $F$  є підпростором простору  $V$ .

*Доведення:*

Нехай  $W = L(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n})$ ,  $\overline{x} \in W$ ,  $\overline{y} \in W$  - довільні вектори з  $W$  і  $\lambda$  - довільний скаляр поля  $F$ . Тоді  $\overline{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \overline{a_i}$ ,  $\overline{y} = \sum_{i=1}^m \beta_i \overline{a_i}$ ; тому  $\overline{x} + \overline{y} = \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) \overline{a_i} \in W$  і  $\lambda \overline{x} = \sum_{i=1}^m \lambda \alpha_i \overline{a_i} \in W$ . В силу теореми 2.2,  $W = L(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n})$  є підпростором простору  $V$ .

Виявляється, що будь-який підпростір векторного

простору  $V$  може бути представлений як лінійна оболонка деякої системи векторів простору  $V$ . Справді, нехай  $W$  - підпростір простору  $V$  і  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}\}$  - його базис. Тоді очевидно, що  $W = L(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n})$ .

Відмітимо ще, що розмірність підпростору  $W$  векторного простору  $V$  не перевищує розмірності  $V$ . Це випливає з леми 2.4.

### ЛЕМА 3.7

Якщо  $U$  і  $W$  - підпростори векторного простору  $V$ ,  $U \subseteq W$ , і  $\dim U = \dim W$ , то  $U=W$ .

*Доведення:*

Якщо  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}\}$  - базис підпростору  $U$ , то в силу рівності розмірностей підпросторів  $U$  і  $W$  вказана система векторів є базисом простору  $W$ . Тому  $W = L(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}) = U$ , що і треба було довести.

### ЗАДАЧА 3.2

Використовуючи отримані результати, підрахуємо кількість всіх можливих базисів у просторі  $V$  розмірності  $n$  над полем  $Z_p$ . В силу наслідку з леми 3.5, кожен лінійно незалежну систему векторів простору  $V$  можна доповнити до базису всього простору  $V$ . Тому довільний базис в просторі  $V$  будемо будувати таким чином: спочатку беремо довільну лінійно незалежну систему, яка складається з одного вектора  $\{\overline{a_1}\}$ . Потім знаходимо довільну лінійно незалежну систему, яка містить два вектора, один з яких дорівнює  $\overline{a_1} : \{\overline{a_1}, \overline{a_2}\}$ . Потім будемо довільну лінійно незалежну систему  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}\}$ , яка складається з 3-х векторів і містить попередню систему  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}\}$  і т.д.

Вектором  $\overline{a_1}$  може бути будь-який ненульовий вектор простору  $V$ . Так як простір  $V$  містить  $p^n$  елементів, то вектор  $\overline{a_1}$  можна вибрати  $p^n - 1$  способом. В силу властивості 2 лінійної залежності, система  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}\}$  лінійно незалежна тоді і тільки тоді, коли  $\overline{a_2} \notin L(\overline{a_1})$ , тобто  $\overline{a_2} \in V - L(\overline{a_1})$ . Множина  $V - L(\overline{a_1})$  містить  $p^n - p$  елементів (одномірний підпростір  $L(\overline{a_1})$  складається з  $p$  елементів). Таким чином, для вибору системи  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}\}$  маємо  $(p^n - 1)(p^n - p)$  можливостей. Доведемо індукцією по  $k$ , що число всіх можливих лінійно незалежних систем  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_k}\}$  дорівнює  $(p^k - 1)(p^k - p)(p^k - p^2) \dots (p^k - p^{k-1})$ . Якщо це справедливо, то в лінійно незалежній системі  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}}\}$  вектором  $\overline{a_{k+1}}$  може бути будь-який вектор з множини  $V - L(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_k})$ . Остання множина містить  $p^n - p^k$  елементів. Отже лінійно незалежну систему  $\{\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}}\}$  можна вибрати  $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^k)$  способом. Тому для вибору базису  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}\}$  простору  $V$  існує  $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^{n-1})$  можливостей. В процесі побудови отримано різні упорядковані базиси простору  $V$ . Якщо базиси, які складаються з одних і тих самих векторів, але упорядковані різними способами, вважати однаковими, то всього в просторі  $V$  розмірності  $n$  над полем  $Z_p$  існує  $\frac{1}{n!} (p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^{n-1})$  різних базисів.

### ЗАДАЧА 3.3

Підрахуємо кількість різних підпросторів розмірності  $k$  у векторному просторі  $V$  розмірності  $n$  над полем  $Z_p$ . Як було відмічено, довільний підпростір  $U$  розмірності  $k$  в просторі  $V$  є лі-

нійна оболонка лінійно незалежної системи векторів  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_k}\} : U = L(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_k})$ . Згідно з попередньою задачею існує  $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^{k-1})$  можливостей для вибору системи  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_k}\}$ . При цьому, якщо  $L(\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_k}) = U$ , де  $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_k}\}$  - лінійно незалежна система векторів, то ця система є базисом підпростору  $U$ . Таким чином, кількість лінійно незалежних систем  $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_k}\}$ , лінійні оболонки яких співпадають з одним і тим же підпростором розмірності  $k$ , дорівнює кількості впорядкованих базисів цього підпростору, тобто в силу попередньої задачі дорівнює  $(p^k - 1)(p^k - p)(p^k - p^2) \dots (p^k - p^{k-1})$ .

Отже, кількість всіх можливих підпросторів розмірності  $k$  в  $n$ -мірному векторному просторі над полем  $Z_p$  дорівнює :

$$\frac{(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^{k-1})}{(p^k - 1)(p^k - p)(p^k - p^2) \dots (p^k - p^{k-1})} = \frac{(p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \dots (p^{n-k+1} - 1)}{(p^k - 1)(p^{k-1} - 1) \dots (p - 1)}$$

### ЛЕМА 3.8

Теоретико-множинний перетин підпросторів  $U$  і  $W$  векторного простору  $V$  над полем  $F$  також є підпростором простору  $V$ .

*Доведення:*

Нехай  $T = U \cap W$ . Множина  $T$  непуста, тому що  $\overline{0} \in T$ . Якщо  $\overline{a} \in T$ ,  $\overline{b} \in T$  - два довільних вектора з множини  $T$ , то  $\overline{a} \in U$ ,  $\overline{b} \in U$ , а значить  $\overline{a} + \overline{b} \in U$ , тому, що  $U$  - підпростір в просторі  $V$ . Точно так само  $\overline{a} + \overline{b} \in W$ . Отже,  $\overline{a} + \overline{b} \in T = U \cap W$ . Аналогічно доводиться, що для будь-якого вектора  $\overline{a}$  і будь-якого скаляра  $\lambda \in F$ , вектор  $\lambda \overline{a} \in T$ . В силу теореми 3.2,  $T$  -



підпростір векторного простору  $V$ .

Відмітимо, що теоретико-множинне об'єднання підпросторів  $U$  і  $W$  векторного простору  $V$  буде підпростором тоді і тільки тоді, коли одне з них міститься в іншому. Достатність цього твердження очевидна. Для доведення необхідності відмітимо, що якщо  $U$  не включається в  $W$  і  $W$  не включається в  $U$ , то існує вектор  $\bar{a} \in U - W$  і вектор  $\bar{b} \in W - U$ . Тоді  $\bar{a} \in U \cup W$ ,  $\bar{b} \in U \cup W$ , але  $\bar{a} + \bar{b} \notin U \cup W$ .

Аналогом дії об'єднання для векторного простору  $V$  служить дія додавання підпросторів.

### ОЗНАЧЕННЯ 3.10.

Сумою підпросторів  $U$  і  $W$  векторного простору  $V$  називається множина  $E$  всіх можливих сум виду  $\bar{u} + \bar{w}$ , де  $\bar{u} \in U$ ,  $\bar{w} \in W$ .

Для суми підпросторів  $U$  і  $W$  будемо використовувати символ  $U+W$ .

### ТЕОРЕМА 3.4

Сума підпросторів  $U$  і  $W$  векторного простору  $V$  над полем  $F$  є підпростором простору  $V$ .

*Доведення:*

Так як  $\bar{0} \in U \cap W$ , то  $\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} \in U + W$ . Нехай  $\bar{a} \in U + W$ ,  $\bar{b} \in U + W$ , тоді  $\bar{a} = \bar{u}_1 + \bar{w}_1$ ,  $\bar{b} = \bar{u}_2 + \bar{w}_2$ . Тому  $\bar{a} + \bar{b} = (\bar{u}_1 + \bar{w}_1) + (\bar{u}_2 + \bar{w}_2) = (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) + (\bar{w}_1 + \bar{w}_2) \in U + W$ , тому що  $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 \in U$ ,  $\bar{w}_1 + \bar{w}_2 \in W$ . Аналогічно доводиться, що для будь-якого скаляра  $\lambda \in F$ ,  $\lambda \bar{a} \in U + W$ . В силу теореми 3.2,  $U+W$  - підпростір векторного простору  $V$ .

Методом математичної індукції можна визначити суму будь-якої скінченної множини підпросторів векторного простору  $V$ . Неважко при цьому довести, що дія додавання підпросторів асоціативна, тобто  $(U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3)$ , де  $U_i$  - підпростір векторного простору  $V$ ,  $i=1, 2, 3$ .

### ТЕОРЕМА 3.5

Розмірність суми двох підпросторів  $U$  і  $W$  векторного простору дорівнює сумі розмірностей підпросторів  $U$  і  $W$  мінус розмірність перетину  $U \cap W$ .

*Доведення:*

Нехай  $T = U \cap W$  і нехай  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}\}$  - базис підпростору  $T$ . З того, що  $T \subset U$ , випливає, що базис  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}\}$  можна включити в базис підпростору  $U$ .

Нехай  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}, \overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_m}\}$  - базис підпростору  $U$ . Так само можна взяти базис  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}, \overline{w_1}, \overline{w_2}, \dots, \overline{w_l}\}$  підпростору  $W$ . Отже,  $\dim U = k + m$ ,  $\dim W = k + l$ ,  $\dim U \cap W = k$ . Для доведення теореми потрібно встановити, що  $\dim(U + W) = k + l + m$ . Остання рівність очевидна, якщо базисом підпростору  $U + W$  є множина:

$$\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}, \overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_m}, \overline{w_1}, \overline{w_2}, \dots, \overline{w_l}\} \quad (3.3)$$

Доведемо це. Встановимо спочатку лінійну незалежність системи (3.3).

Нехай:

$$\alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + \dots + \alpha_k \overline{e_k} + \beta_1 \overline{u_1} + \beta_2 \overline{u_2} + \dots + \beta_m \overline{u_m} + \gamma_1 \overline{w_1} + \gamma_2 \overline{w_2} + \dots + \gamma_l \overline{w_l} = \overline{0}$$

Звідси:

$$\alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + \dots + \alpha_k \overline{e_k} + \beta_1 \overline{u_1} + \beta_2 \overline{u_2} + \dots + \beta_m \overline{u_m} = -\gamma_1 \overline{w_1} - \gamma_2 \overline{w_2} - \dots - \gamma_l \overline{w_l}$$

Вектор, що стоїть в лівій частині нерівності, належить  $U$ , а вектор з правої частини рівності належить  $W$ . Отже, обидва ці вектори належать  $T = U \cap W$ . Таким чином,

$$-\gamma_1 \overline{w_1} - \gamma_2 \overline{w_2} - \dots - \gamma_l \overline{w_l} = \delta_1 \overline{e_1} + \delta_2 \overline{e_2} + \dots + \delta_k \overline{e_k},$$

тому що  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}\}$  - базис підпростору  $T$ .

Тому  $\overline{\delta_1 e_1} + \overline{\delta_2 e_2} + \dots + \overline{\delta_k e_k} + \overline{\gamma_1 w_1} + \overline{\gamma_2 w_2} + \dots + \overline{\gamma_l w_l} = \overline{0}$ . З того, що  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}, \overline{w_1}, \overline{w_2}, \dots, \overline{w_l}\}$  базис підпростору  $W$ , отримаємо  $\overline{\delta_1} = \overline{\delta_2} = \dots = \overline{\delta_k} = \overline{\gamma_1} = \overline{\gamma_2} = \dots = \overline{\gamma_l} = \overline{0}$ . Звідси випливає, що  $\overline{\alpha_1 e_1} + \overline{\alpha_2 e_2} + \dots + \overline{\alpha_k e_k} + \overline{\beta_1 u_1} + \overline{\beta_2 u_2} + \dots + \overline{\beta_m u_m} = \overline{0}$ . Оскільки  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}, \overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_m}\}$  - базис підпростору  $U$ , то  $\overline{\alpha_1} = \overline{\alpha_2} = \dots = \overline{\alpha_k} = \overline{\beta_1} = \overline{\beta_2} = \dots = \overline{\beta_m} = \overline{0}$ . Отже в будь-якій нульовій лінійній комбінації векторів  $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_k}, \overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}, \overline{w_1}, \dots, \overline{w_l}\}$  всі коефіцієнти дорівнюють нулю, тобто вказана система векторів лінійно незалежна. З іншої сторони, довільний вектор  $\overline{x} \in U + W$  можна записати у вигляді  $\overline{u} + \overline{w}$ , де  $\overline{u} \in U$ ,  $\overline{w} \in W$ . З того що кожен з векторів  $\overline{u}$  і  $\overline{w}$  лінійно виражається через систему векторів  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}, \overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_m}, \overline{w_1}, \overline{w_2}, \dots, \overline{w_l}\}$  випливає, що через цю систему лінійно виражається і вектор  $\overline{x}$ . Отже, вказана система векторів є максимальною лінійно незалежною в просторі  $U+W$ , тобто є базисом простору  $U+W$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 3.11.

Сума підпросторів  $U$  і  $W$  векторного простору  $V$  називається прямою, якщо  $U \cap W = \{\overline{0}\}$ . Для прямої суми підпросторів  $U$  і  $W$  будемо використовувати символ  $U \oplus W$ .

#### ЛЕМА 3.9

Якщо  $S = U \oplus W$ , то  $\dim S = \dim U + \dim W$ .

*Доведення:*

З того, що  $U \cap W = \{\overline{0}\}$ , то  $\dim U \cap W = 0$ , в силу теореми  $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$ .

### ТЕОРЕМА 3.6

Для того, щоб сума підпросторів  $U$  і  $W$  векторного простору  $V$  була прямою, необхідно і достатньо, щоб будь-який вектор

$\bar{x} \in U + W$  можна було представити єдиним способом у вигляді  $\bar{x} = \bar{u} + \bar{w}$ , де  $\bar{u} \in U$ ,  $\bar{w} \in W$ .

*Доведення:*

*Необхідність.*

Якщо  $S = U \oplus W$ , то  $U \cap W = \{\bar{0}\}$ . Нехай  $\bar{x} \in S$ ; тоді  $\bar{x} = \bar{u}_1 + \bar{w}_1$ , де  $\bar{u}_1 \in U$ ,  $\bar{w}_1 \in W$ . Припустимо, що  $\bar{x} = \bar{u}_2 + \bar{w}_2$ , де  $\bar{u}_2 \in U$ ,  $\bar{w}_2 \in W$ . Звідси отримаємо:  $\bar{u}_1 + \bar{w}_1 = \bar{u}_2 + \bar{w}_2$ , або  $\bar{u}_1 - \bar{u}_2 = \bar{w}_1 - \bar{w}_2 \in U \cap W$ ; таким чином  $\bar{u}_1 - \bar{u}_2 = \bar{w}_1 - \bar{w}_2 = \bar{0}$ , а тому  $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ ;  $\bar{w}_1 = \bar{w}_2$ . Необхідна умова доведена.

*Достатність:*

Нехай довільний вектор  $\bar{x} \in S = U + W$  можна однозначно записати у вигляді  $\bar{x} = \bar{u} + \bar{w}$ , де  $\bar{u} \in U$ ,  $\bar{w} \in W$ . Припустимо, що  $\bar{a} \in U \cap W$ . Вектор  $\bar{0}$ , який належить підпростору  $S = U + W$  можна представити у вигляді  $\bar{0} = \bar{0} + \bar{0}$ , і  $\bar{0} = \bar{a} + (-\bar{a})$ , причому перші доданки в обох рівностях належать підпростору  $U$ , а другі - підпростору  $W$ . З однозначності представлення вектора  $\bar{0}$  випливає, що  $\bar{a} = \bar{0}$ .

Теорема доведена.

Поняття прямої суми розповсюджується на суму 3-х і більше підпросторів так: сума підпросторів  $U_1, U_2, \dots, U_k$  векторного простору  $V$  називається прямою, якщо перетин кожного підпростору  $U_i$  з сумою інших підпросторів є нульовий простір  $\{\bar{0}\}$ .

Пряма сума підпросторів  $U_1, U_2, \dots, U_k$ , як і вище, позначається через  $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$ .

Міркуючи так само, як і в теоремі 3.6, можна довести, що сума  $S = U_1 + U_2 + \dots + U_k$  є прямою тоді і тільки тоді, коли кожен вектор  $\bar{x} \in S$  однозначно був представлений у вигляді:

$$\bar{x} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \dots + \bar{u}_k, \quad \bar{u}_i \in U, \quad i=1, 2, \dots, k.$$

### 3.6 Лінійні многовиди

#### ОЗНАЧЕННЯ 3.12.

Нехай  $U$  - підпростір векторного простору  $V$  над деяким полем  $P$  і  $\bar{x} \in V$ . Лінійним многовидом в просторі  $V$  називається множина  $U + \bar{x}$ , що складається з усіх можливих векторів виду  $\bar{u} + \bar{x}$ ,  $\bar{u} \in U$ ;  $U + \bar{x} = \{\bar{u} + \bar{x} \mid \bar{u} \in U\}$ .

Лінійний многовид являє собою "зсув" підпростору  $U$  на вектор  $\bar{x}$ . Якщо  $\bar{x} \notin U$ , то лінійний многовид  $U + \bar{x}$  не є підпростором векторного простору  $V$ , тому що в цьому випадку  $0 \notin U + \bar{x}$ .

Очевидно, якщо  $\bar{a} \in U + \bar{x}$ ,  $\bar{b} \in U + \bar{x}$ , то  $\bar{a} - \bar{b} \in U$ . Крім того, будь-який вектор  $\bar{u} \in U$  можна представити у вигляді різниці двох векторів  $\bar{a} \in U + \bar{x}$ ,  $\bar{b} \in U + \bar{x}$ . Дійсно,  $\bar{u} = \bar{a} - \bar{b}$ , де  $\bar{a} = \bar{u} + \bar{x} \in U + \bar{x}$ ,  $\bar{b} = \bar{0} + \bar{x} \in U + \bar{x}$ . Звідси випливає, що якщо два лінійних многовиди  $U + \bar{x}$  і  $W + \bar{y}$  векторного простору  $V$  рівні, тобто  $U + \bar{x} = W + \bar{y}$ , то  $U = W$ . Таким чином, лінійний підпростір  $U$ , про який говориться в означенні лінійного многовиду, визначений цим многовидом однозначно. Навпаки, за вектор  $\bar{y}$ , що визначає лінійний многовид  $U + \bar{x}$ , можна взяти будь-який вектор цього многовиду. Справді, якщо  $\bar{y} \in U + \bar{x}$ , то  $\bar{y} = \bar{u}_0 + \bar{x}$ ,  $\bar{u}_0 \in U$ . Тоді  $\bar{u} + \bar{y} = \bar{u} + (\bar{u}_0 + \bar{x}) = (\bar{u} + \bar{u}_0) + \bar{x} \in U + \bar{x}$ , або  $U + \bar{y} \subset U + \bar{x}$ . З іншої сторони, якщо  $\bar{z}$  - довільний вектор з  $U + \bar{x}$ , то  $\bar{z} = \bar{u}_1 + \bar{x}$ ,  $\bar{u}_1 \in U$ . Тому  $\bar{z} = (\bar{u}_1 - \bar{u}_0) + (\bar{u}_0 + \bar{x}) = (\bar{u}_1 - \bar{u}_0) + \bar{y} \in U + \bar{y}$ . Отже,  $U + \bar{x} \subset U + \bar{y}$ , а значить  $U + \bar{x} = U + \bar{y}$ .

## Глава 4. Матриці

### 4.1 Матриці і операції над ними

Матрицею розміру  $m \times n$  будемо називати таблицю, що складається з елементів деякого поля  $F$ , яка містить  $m$  рядків і  $n$  стовпців:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \quad \alpha_{ij} \in F, i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$$

Скаляри  $\alpha_{ij} \in F$  називаються елементами матриці.

Кожен елемент матриці записується за допомогою двох індексів, перший з яких вказує номер рядка, що містить вказаний елемент, а другий - номер стовпця. Очевидно, всі елементи деякого рядка даної матриці мають однаковий перший індекс, а всі елементи деякого стовпця - однаковий другий індекс.

Позначати матриці будемо великими латинськими буквами -  $A, B, C$  і т.д. Будемо казати, що матриця  $A$  має розміри  $m \times n$ , якщо  $A$  містить  $m$  рядків,  $n$  стовпців. У випадку  $m \neq n$  матрицю  $A$  називають прямокутною. Якщо  $m = n$ , то матриця  $A$  називається квадратною порядку  $m$  ( $m$  - число рядків і стовпців матриці  $A$ ).

Якщо відомі розміри матриці, то матрицю

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{можна записати коротко у вигляді}$$
$$A = (\alpha_{ij}).$$

Матриці  $A$  і  $B$  однакового розміру  $m \times n$  будемо називати рівними, якщо рівними будуть відповідні елементи цих матриць; таким чином, якщо

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mn} \end{bmatrix}$$

і  $A=B$ , то  $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$  для будь-яких  $i, j$ :  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ .

#### ОЗНАЧЕННЯ 4.1.

Сумою двох матриць  $A=(\alpha_{ij})$  і  $B=(\beta_{ij})$  однакового розміру  $m \times n$  називається матриця  $C=(\gamma_{ij})$  того ж розміру  $m \times n$ , кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів даних матриць:

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, m; \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Операцію додавання матриць позначають символом „+”:  
 $C=A+B$ .

Очевидно, що дія додавання матриць має асоціативну і комутативну властивості:

$$(A+B)+C=A+(B+C), \quad A+B=B+A$$

тому що ці властивості має дія додавання елементів поля  $F$ .

Матриця розміру  $m \times n$ , всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою матрицею:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Відносно дії додавання матриць нульова матриця  $O$  є нейтральною, тобто для будь-якої матриці  $A$  розміру  $m \times n$  справедлива рівність  $A+O=A$ . Крім того, якщо позначити через  $(-A)$  матрицю, кожен елемент якої є протилежним відповідному

елементу матриці  $A$ , то очевидно  $A + (-A) = 0$ ;  $-A = (-\alpha_{ij})$ . Матрицю  $-A$  називають протилежною матриці  $A$ .

Примітка. Операція додавання матриць різних розмірів не визначена.

#### ОЗНАЧЕННЯ 4.2.

Добутком матриці  $A = (\alpha_{ij})$  розміру  $m \times n$  на скаляр  $\lambda \in P$ , називається матриця  $B$  розміру  $m \times n$ , елементи якої отримані з відповідних елементів матриці  $A$  множенням на скаляр  $\lambda$ :

$$B = (\beta_{ij}), \text{ де } \beta_{ij} = \lambda \alpha_{ij}, i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n.$$

З аналогічних властивостей операцій додавання і множення в полі  $F$  легко отримати наступні властивості операцій над матрицями:

1.  $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ ;
2.  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ ;
3.  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ ;
4.  $1 \cdot A = A$

З цих властивостей і наведених вище властивостей операцій додавання матриць випливає, що

*Множина матриць розміру  $m \times n$  з елементами поля  $F$  утворює векторний простір над цим полем відносно додавання матриць і множення матриць на скаляри з  $F$ .*

### ЗАДАЧА 4.1

Нехай  $M$  - множина всіх матриць розміру  $m \times n$  з коефіцієнтами з поля  $F$ . Позначимо через  $E_{ij}$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ;  $j=1, 2, \dots, n$  матрицю, в якій елемент, що стоїть на перетині рядка з номером  $i$  та стовпця з номером  $j$ , дорівнює 1, а всі інші елементи дорівнюють нулю. Довести, що множина  $M$  є векторним



простором розмірності  $m \times n$  над полем  $F$ , а множина матриць  $\{E_{ij}\}$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ;  $j=1, 2, \dots, n$ , є його базисом.

#### ОЗНАЧЕННЯ 4.3

Нехай  $A = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_k})$  матриця розміру  $1 \times k$  (матриця-рядок) і  $B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_k \end{bmatrix}$  матриця розміру  $k \times 1$  (матриця-стовпець).

Добутком матриць  $A$  і  $B$  називається скаляр  $\gamma$ , який дорівнює  $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_k\beta_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i\beta_i$ .

Відзначимо, що множити матрицю-рядок на матрицю-стовпець можна тільки в тому випадку, коли вони мають одну і ту ж кількість елементів (число  $k$ ).

#### ОЗНАЧЕННЯ 4.4

Нехай  $A = (\alpha_{ij})$  матриця розміру  $m \times k$ , а  $B = (\beta_{ij})$  матриця розміру  $k \times n$ . Добутком матриці  $A$  на матрицю  $B$  називається матриця  $C = A \times B$  розміру  $m \times n$ , в якій елемент  $\gamma_{ij}$  дорівнює добутку рядка матриці з номером  $i$  на стовпець матриці  $B$  з номером  $j$ :

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \alpha_{i3}\beta_{3j} + \dots + \alpha_{ik}\beta_{kj} = \sum_{r=1}^k \alpha_{ir}\beta_{rj}.$$

#### ЗАУВАЖЕННЯ

Добуток матриць  $A \times B$  визначений тільки в тому випадку, коли число стовпців в лівому співмножнику  $A$  дорівнює числу рядків в правому співмножнику  $B$ . В цьому випадку число елементів довільного рядка матриці  $A$  дорівнює числу елементів довільного стовпця матриці  $B$ .

З цього зауваження випливає, що якщо  $m \neq n$ , то добуток  $A \times B$  матриці  $A$  розміру  $m \times k$  на матрицю  $B$  розміру  $k \times n$  визначений, але добуток  $B \times A$  невизначений ( $m \neq n$ ).

Якщо ж  $m=n$ , але  $m \neq k$ , то означені обидва добутки  $A \times B$  і  $B \times A$ ,  $A \times B$  і  $B \times A$  квадратні матриці, причому матриця  $A \times B$  має порядок  $m$ , а матриця  $B \times A$  - порядок  $k$ . Оскільки  $m \neq k$ , то матриці  $A \times B$  і  $B \times A$  порівнювати не можна. (Питання про рівність  $A \times B$  і  $B \times A$  немає сенсу).

Як це прийнято в математичних текстах, знак множення ми часто будемо опускати.

Розглянемо, нарешті, випадок, коли  $m=n=k$ , тобто  $A$  і  $B$  - квадратні матриці порядку  $m$ . В цьому випадку  $AB$  і  $BA$  визначені і обидві мають порядок  $m$ . Але при  $m > 1$  рівність  $AB=BA$  в загальному випадку не виконується.

$$\text{Справді, якщо } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ і } AB \neq BA.$$

Отже, операція множення в множині квадратних матриць однакового розміру, взагалі кажучи, некомутативна.

Відзначимо ще одну особливість операції множення матриць, яка демонструє різницю між нею і операцією множення елементів поля, а саме: добуток двох ненульових матриць може бути нульовою матрицею. Іншими словами, в множині квадратних матриць є дільники нуля.

*Отже, на множині квадратних матриць розміру  $m$  визначені операції додавання, множення на скаляр основного поля і множення матриць.*

### ПРИКЛАД

Розглянемо три матриці над полем  $R$ :

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Всі три матриці не є нульовими, але

$$E_{11}E_{22} = E_{22}E_{11} = 0, E_{11}E_{12} = E_{12}, E_{12}E_{11} = 0, E_{22}E_{12} = 0, E_{12}E_{22} = E_{12}.$$

Наряду з відзначеними "неприємними" властивостями, тобто некомутативністю та існуванням дільників нуля, операція множення матриць має таку важливу властивість, як асоціативність (коли всі множення визначені):

$$A(BC) = (AB)C$$

*Доведемо цю рівність.*

Нехай  $A = (\alpha_{ij})$  - матриця розміру  $m \times k$ , а  $B = (\beta_{ij})$  - матриця розміру  $k \times l$  і  $C = (c_{ij})$  - матриця розміру  $l \times n$ .

Нехай  $p_{ij}$  - довільний елемент матриці  $AB$  розміру  $m \times l$ ;

тоді  $p_{ij} = \sum_{r=1}^k \alpha_{ir} \beta_{rj}$ . Якщо  $\sigma_{ij}$  - довільний елемент матриці

$$(AB)C \text{ розміру } m \times n, \text{ то } \sigma_{ij} = \sum_{s=1}^l p_{is} \gamma_{sj} = \sum_{s=1}^l \left( \sum_{r=1}^k \alpha_{ir} \beta_{rj} \right) \gamma_{sj} =$$

$$\sum_{s=1}^l \sum_{r=1}^k \alpha_{ir} \beta_{rs} \gamma_{sj} = \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^l (\beta_{rs} \gamma_{sj}) \alpha_{ir} =$$

$$\sum_{r=1}^k \left( \sum_{s=1}^l \beta_{rs} \gamma_{sj} \right) \alpha_{ir} = \sum_{r=1}^k \tau_{rj} \alpha_{ir} = \sum_{r=1}^k \alpha_{ir} \tau_{rj} = \mu_{ij}.$$

Тут  $\tau_{rj} = \sum_{s=1}^l \beta_{rs} \gamma_{sj}$  - елемент матриці  $BC$ , який стоїть на

перетині рядка з номером  $r$  і стовпця з номером  $j$ . Звідси

випливає, що  $\mu_{ij} = \sum_{r=1}^k \alpha_{ir} \tau_{rj}$  є елемент матриці  $A(BC)$  з  $i$ -го

рядка та j-го стовпця. З того, що  $p_{ij} = \mu_{ij}$  для  $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ , отримаємо  $(AB)C=A(BC)$ , що і треба було довести.

Додавання і множення матриць пов'язані законом дистрибутивності:

$$A(B+C)=AB+AC; \quad (A+B)C=AC+BC.$$

Мається на увазі, що всі вказані в цих рівностях дії виконуються. Обидві рівності доводяться однаково. Доведемо одне з них, наприклад перше.

Нехай  $A=(a_{ij})$  - матриця розміру  $k \times m$ , а  $B=(b_{ij})$  і  $C=(c_{ij})$  - матриці розміру  $m \times n$ . Тоді, якщо  $\lambda_{ij}$  - довільний елемент матриці  $B+C$ , то  $\lambda_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$ . Нехай  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  - довільні елементи матриць  $A(B+C)$ ,  $AB$ ,  $AC$  - відповідно. Тоді за означенням добутку матриць:  $\alpha_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} \lambda_{rj}$ ;  $\beta_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} b_{rj}$ ;  $\gamma_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} c_{rj}$ . Так як  $\lambda_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$ , то  $\alpha_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} \lambda_{rj} = \sum_{r=1}^m a_{ir} (b_{rj} + c_{rj}) = \sum_{r=1}^m (a_{ir} b_{rj} + a_{ir} c_{rj}) = \sum_{r=1}^m a_{ir} b_{rj} + \sum_{r=1}^m a_{ir} c_{rj} = \beta_{ij} + \gamma_{ij}$ , а отже,  $A(B+C)=AB+AC$ .

Нехай  $A$  - матриця порядку  $n$ ,  $n=S_1 + S_2 + \dots + S_t$ ,  $1 < S_i < n$ ,  $i=1, 2, \dots, t$ . Розіб'ємо матрицю  $A$  на клітини:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{t1} & A_{t2} & \dots & A_{tt} \end{bmatrix}, \text{ де } A_{ij} - \text{матриця розміру } S_i \times S_j;$$

$i, j=1, 2, \dots, t$ . Очевидно  $A_{ii}$  - квадратна матриця порядку  $S_i$ . Матриці  $A_{ij}$  називаються клітинами матриці  $A$ , а сама матриця  $A$  - клітинною.

Нехай  $B$  - матриця порядку  $n$ , і

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{t1} & B_{t2} & \dots & B_{tt} \end{bmatrix} - \text{розбиття матриці } B \text{ на клітини,}$$

який має ту саму схему, що і розбиття матриці  $A$ , тобто клітина  $B_{ij}$  має розмір  $S_i \times S_j$ ,  $i, j=1, 2, \dots, t$ . Очевидно, для будь-яких  $i, j$ ,  $k=1, 2, \dots, t$  визначені добутки клітин  $AB$ . Нехай  $r_0 = 0$ ,  $r_1 = S_1$ ,  $r_2 = S_1 + S_2, \dots, r_i = S_1 + S_2 + \dots + S_i, \dots, r_t = S_1 + S_2 + \dots + S_t$ .

#### ЛЕМА 4.1

Добуток клітинних матриць  $AB$  є клітинною матрицею

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{t1} & C_{t2} & \dots & C_{tt} \end{bmatrix},$$

$$\text{де } C_{km} = \sum_{j=1}^t A_{kj} B_{jm}; k, m=1, 2, \dots, t.$$

#### Доведення:

Нехай  $A=(\alpha_{ij})$ ,  $B=(\beta_{ij})$ ; розіб'ємо матрицю  $C=AB$  на клітини  $C_{ij}$  за тією ж схемою, за якою розбиті на клітини співмножники  $A$  і  $B$ , а саме: розмірність клітини  $C_{ij}$  дорівнює  $S_i \times S_j$ ,  $i, j=1, 2, \dots, t$ . Нехай  $C_{km}$  - довільна клітина матриці  $C$  і  $\gamma_{uv}$  - її довільний елемент,  $u=1, 2, \dots, S_k$ ,  $v=1, 2, \dots, S_m$ . Так як  $S_1 + S_2 + \dots + S_{k-1} = r_{k-1}$ , то  $\gamma_{uv}$  є елементом рядка з номером  $w = r_{k-1} + u$ . Так само  $\gamma_{uv}$  стоїть в стовпцеві матриці  $C$  з номером  $z = r_{k-1} + v$ . Значить, за означенням добутку матриць

$$A \in B, \gamma_{uv} = \sum_{j=1}^n a_{wj} b_{jz} = \sum_{j=1}^{r_1} a_{wj} b_{jz} + \sum_{j=r_1+1}^{r_2} a_{wj} b_{jz} + \dots + \sum_{j=r_{t-1}+1}^{r_t} a_{wj} b_{jz}$$

( $z_t = n$ ). Позначимо через  $\gamma_{uv}^p$  елемент  $\sum_{j=r_{p-1}+1}^{r_p} a_{wj} b_{jz}$ ,  $p=1, 2, \dots,$

$t$ . Тоді  $\gamma_{uv} = \sum_{p=1}^t \gamma_{uv}^p$ , при цьому неважко помітити, що  $\gamma_{uv}^p$  є

елементом матриці  $A_{kp} B_{pm}$ , який стоїть на перетині рядка з номером  $u$ , і стовпця з номером  $v$ . В силу довільності індексів  $u$  і

$v$ ,  $1 \leq u \leq S_k$ ,  $1 \leq v \leq S_m$  і співвідношення  $\gamma_{uv} = \sum_{p=1}^t \gamma_{uv}^p$ ,

$\gamma_{uv} \in C_{km}$ , отримаємо, що  $C_{km} = \sum_{p=1}^t A_{kp} B_{pm}$ , що і потрібно було

довести.

#### ОЗНАЧЕННЯ 4.5

Квадратна матриця  $D=(d_{ij})$  порядку  $m$  називається діагональною, якщо  $d_{ij}=0$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ;  $j=1, 2, \dots, m$ ,  $i \neq j$ .

Діагональна матриця  $D$  має такий вигляд:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{mm} \end{bmatrix}$$

Таким чином, всі елементи діагональної матриці, що стоять поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю (головною діагоналлю називається діагональ квадратної матриці, що з'єднує її ліву верхню "вершину" з правою нижньою).

**Примітка.** Звісно, в діагональній матриці деякі елементи головної діагоналі також можуть дорівнювати нулю. Зокрема, нульова квадратна

матриця (матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю) також є діагональною.

Якщо  $A=(\alpha_{ij})$  - матриця розміром  $k \times m$ , то безпосередньою перевіркою можна впевнитись, що

$$AD = \begin{bmatrix} \alpha_{11}d_{11} & \alpha_{12}d_{22} & \dots & \alpha_{1m}d_{mm} \\ \alpha_{21}d_{11} & \alpha_{22}d_{22} & \dots & \alpha_{2m}d_{mm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1}d_{11} & \alpha_{k2}d_{22} & \dots & \alpha_{kn}d_{mm} \end{bmatrix}$$

Таким чином, при множенні матриці  $A$  розміру  $k \times m$  справа на діагональну матрицю  $D$  порядку  $d$ , всі елементи  $j$ -го стовпця матриці  $A$  множаться на елемент  $d_{jj}$ ,  $j=1, 2, \dots, m$ . Аналогічно, якщо матрицю  $B$  розміру  $m \times n$  помножити зліва на діагональну матрицю  $D$  порядку  $m$ , то всі елементи  $r$ -го рядка множаться на  $d_{rr}$ ,  $r=1, 2, \dots, k$ .

#### ОЗНАЧЕННЯ 4.6

Діагональна матриця  $S$  називається скалярною, якщо всі елементи її головної діагоналі рівні між собою.

$$S = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix}$$

При множенні матриці  $A$  потрібного розміру зліва і справа на скалярну матрицю  $S$  всі елементи матриці  $A$  множаться на скаляр  $\alpha$ :  $AS=\alpha A$ ;  $SA=\alpha A$ .

**Примітка.** Остання рівність оправдовує назву "скалярна" для матриці  $S$ . Скалярні матриці в операції множення ведуть себе як відповідні скаляри в операції множення на скаляр.

#### ОЗНАЧЕННЯ 4.7

Діагональна матриця  $E$  називається одиничною, якщо всі елементи її головної діагоналі дорівнюють одиниці.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Так як одинична матриця є скалярною, і відповідний їй скаляр  $\alpha$  дорівнює 1, то має місце рівність

$$EA=A, BE=B$$

(якщо дії множення у вказаних рівностях виконуються).

Зокрема, якщо  $E$  має порядок  $m$  і  $A$  - довільна квадратна матриця того ж порядку, то  $AE=EA=A$ , цими рівностями пояснюється назва "одинична" для матриці  $E$ .

#### ОЗНАЧЕННЯ 4.8

Квадратна матриця  $A$  називається матрицею, яка має обернену, якщо існує квадратна матриця  $B$ , така що  $AB=BA=E$ .

При цьому матриця  $B$  називається оберненою до матриці  $A$ .

Очевидно, якщо матриця  $B$  є оберненою до матриці  $A$ , то  $B$  також є матрицею, яка має обернену матрицю  $A$ . Тому матриці  $A$  і  $B$  називаються взаємно оберненими.

#### ЛЕМА 4.2

Якщо матриця  $A$  має обернену матрицю  $B$ , то ця обернена матриця єдина.

*Доведення:*

Нехай  $B$  і  $C$  дві матриці, які є оберненими для матриці  $A$ . Тоді за означенням  $BA=AC=E$ . Тому  $(BA)C=EC=C$ . З іншої сторони,  $(BA)C=B(AC)=BE=B$ . Отже,  $B=C$ .

#### ПРИКЛАД 4.2



Діагональна матриця

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{mm} \end{bmatrix},$$

в якій жоден елемент головної діагоналі не дорівнює нулю, має обернену матрицю  $T$ , яка має вигляд:

$$T = \begin{bmatrix} d_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{mm}^{-1} \end{bmatrix}$$

Ясно, що нульова квадратна матриця не має оберненої (подібно тому, як нульовий елемент в полі не має оберненого). Але навіть ненульова матриця може не мати оберненої. Безпосередньою перевіркою можна впевнитись, що діагональна матриця порядку  $m$ ,  $m > 1$ , не буде мати оберненої, якщо хоча б один з елементів її головної діагоналі дорівнює нулю. Необхідна і достатня умови оберненості квадратної матриці будуть встановлені далі.

#### ОЗНАЧЕННЯ 4.9

Квадратна матриця  $A = (\alpha_{ij})$  матриця розміру  $m \times m$  називається верхньою (нижньою) трикутною матрицею, якщо  $\alpha_{ij} = 0$  для  $i > j$  ( для  $i < j$ ),  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Таким чином, якщо  $A$  верхня трикутна матриця, то  $A$  має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{mm} \end{bmatrix}.$$

Аналогічно, якщо  $B$  - нижня трикутна матриця, то

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mm} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що діагональні матриці і тільки вони є як верхніми трикутними, так і нижніми трикутними матрицями. Доведемо, що добуток будь-якого числа верхніх (нижніх) трикутних матриць знову є верхньою (нижньою) трикутною матрицею. Достатньо це встановити для випадку двох співмножників  $A$  і  $B$ .

Нехай  $A=(\alpha_{ij})$ ,  $B=(\beta_{ij})$  - дві верхні трикутні матриці порядку  $m$ . За означенням верхньої трикутної матриці для  $i>j$ ,  $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = 0$ .

Нехай  $c_{ij}$  - довільний елемент матриці  $AB$ . Тоді  $c_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} b_{rj}$ .

Нехай  $i>j$ . Якщо  $i>r$ , то  $a_{ir}=0$  і  $a_{ir} b_{rj}=0$ ; якщо ж  $i<r$ , то  $r>i>j$  і тоді

$b_{rj}=0$ . Таким чином, кожен доданок в сумі  $\sum_{r=1}^m a_{ir} b_{rj}$  дорівнює

нулю при  $i>j$ , тобто  $c_{ij}=0$  для  $i>j$ . Отже, матриця  $AB$  є верхньою трикутною матрицею. Аналогічно доводиться відповідне твердження для нижніх трикутних матриць.

#### ОЗНАЧЕННЯ 4.10

Нехай матриця  $A=(a_{ij})$  має розмір  $k \times m$ . Матриця  $B=(b_{rs})$  розміру  $m \times k$  називається транспонованою до матриці  $A$ , якщо

$b_{rs} = a_{sr}$ ,  $s=1, 2, \dots, k$ ,  $r=1, 2, \dots, m$ . Матриця, транспонована до матриці  $A$  позначається через  $A^t$ .

Таким чином, якщо

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{km} \end{bmatrix}, \text{ то } A^t = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{k1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{km} \end{bmatrix}$$

Має місце наступна властивість:

$(AB)^t = B^t A^t$ , тобто матриця, транспонована до добутку двох матриць, дорівнює добутку у зворотному порядку матриць, транспонованих до співмножників.

Доведемо цю властивість. Нехай  $A=(a_{ij})$  матриця розміру  $k \times m$ ,  $B=(b_{rs})$  розміру  $m \times n$ . Якщо  $c_{ij}$  - довільний елемент

матриці  $AB$ , то  $c_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} b_{rj}$ .

Нехай  $A^t=(u_{rs})$ ,  $r=1, 2, \dots, m$ ;  $s=1, 2, \dots, k$ ;  $B^t=(v_{rs})$ ,  $r=1, 2, \dots, n$ ;  $s=1, 2, \dots, m$ ;  $u_{rs} = a_{sr}$ ,  $v_{rs} = b_{sr}$ . З того, що число рядків матриці  $B$  дорівнює числу стовпців матриці  $A$ , то число стовпців матриці  $B^t$  дорівнює числу рядків матриці  $A^t$ .

Отже, добуток  $B^t A^t$  визначений і якщо  $d_{ij}$  - довільний елемент цього добутку, то  $d_{ij} = \sum_{t=1}^m v_{it} u_{tj} = \sum_{t=1}^m b_{it} a_{jt} = \sum_{t=1}^m a_{jt} b_{it} = c_{ij}$ .

Так як розміри матриці  $(AB)^t=(h_{ij})$ ,  $h_{ij} = c_{ij}$ , і матриці  $B^t A^t=(d_{ij})$  співпадають, причому  $h_{ij} = c_{ij} = d_{ij}$ , то рівність  $(AB)^t = B^t A^t$  доведено.

## 4.2 Елементарні матриці

В попередньому розділі були введені матриці  $E_{ij}$ . Нагадаємо їхнє означення:  $E_{ij}$  - це матриця довільного розміру, в якій елемент, що стоїть на перетині рядка з номером  $i$  та стовпця з номером  $j$  дорівнює 1, а всі інші елементи дорівнюють нулю. Безпосередньо з означення добутку матриць отримаємо, що

$$E_{ij} E_{rs} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } j \neq r \\ E_{is}, & \text{якщо } j = r \end{cases} \quad (4.1)$$

Символом  $O$  позначена нульова матриця.

### ОЗНАЧЕННЯ 4.11

Квадратна матриця  $A$  порядку  $m$  називається елементарною, якщо  $A = E + \lambda E_{ij}$ , де  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 < j < m$ ,  $i \neq j$ .

Будемо позначати  $A = E + \lambda E_{ij}$  через  $F_{ij}(\lambda)$ .

Очевидно, що всяка елементарна матриця є, або верхньою, або нижньою трикутною матрицею, в якій всі елементи головної діагоналі дорівнюють 1.

**ТЕОРЕМА 4.1** (Основна властивість матриці  $F_{ij}(\lambda)$ ).

Результат множення матриці  $F_{ij}(\lambda)$  зліва на довільну матрицю  $A$  (відповідних розмірів) є елементарним перетворенням рядків матриці  $A$ :

$$F_{ij}(\lambda) \cdot A = F_{ij}(\lambda)(A)$$

Сформулюємо без доведення деякі важливі властивості елементарних матриць:

#### Властивість 4.1

$$F_{ij}(\lambda)F_{ij}(\mu) = F_{ij}(\lambda + \mu), \text{ зокрема, } F_{ij}(\lambda)F_{ij}(\mu) = F_{ij}(\mu)F_{ij}(\lambda)$$

Властивість є безпосереднім наслідком теореми 4.1

#### Властивість 4.2.

Матриця  $F_{ij}(\lambda)$  має обернену матрицю  $F_{ij}(-\lambda)$ .

Властивість є безпосереднім наслідком теореми 4.1

*Властивість 4.3*

При  $j \neq k$

$$F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu)F_{ij}(-\lambda)F_{ki}(-\mu) = F_{kj}(-\mu\lambda)$$

Властивість є безпосереднім наслідком теореми 4.1

*Властивість 4.4.*

$$F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda)F_{ki}(-\mu)F_{ij}(-\lambda) = F_{kj}(\mu\lambda), \quad j \neq k.$$

Властивість є безпосереднім наслідком теореми 4.1

*Властивість 4.5.*

$$F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu) = F_{kj}(-\mu\lambda)F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda);$$

$$F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu) = F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda)F_{kj}(-\mu\lambda);$$

$$F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda) = F_{kj}(\mu\lambda)F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu);$$

$$F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda) = F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu)F_{kj}(\mu\lambda), \quad j \neq k$$

Властивість є безпосереднім наслідком теореми 4.1

*Властивість 4.6.*

Властивість є безпосереднім наслідком теореми 4.1

*Властивість 4.8*

Якщо  $D$  - діагональна матриця,  $D = \sum_{k=1}^m \gamma_k E_{kk}$ ,  $\gamma_1 \cdot \gamma \cdot \dots \cdot \gamma_m \neq 0$ ,

то  $F_{ij}(\mu)D = DF_{ij}(\mu\gamma_i^{-1}\gamma_j)$ ,  $DF_{ij}(\mu) = F_{ij}(\mu\gamma_j\gamma_i^{-1})D$ .

Властивість є безпосереднім наслідком теореми 4.1

**ОЗНАЧЕННЯ 4.12.**

Позначимо через  $E(i, j)$  матрицю  $E - E_{ii} - E_{jj}$ . Будемо називати нормальною матрицю наступного вигляду:

$$L_{ij}(\lambda) = E(i, j) + \lambda E_{ij} - \lambda^{-1} E_{ji};$$

тут мається на увазі, що  $i \neq j, \lambda \neq 0$ .

З означення випливає, що  $L_{ji}(\lambda) = L_{ij}(-\lambda^{-1})$ .

**Властивість 4.9.**

Якщо  $i \neq j$ , то  $L_{ij}(\lambda)L_{ij}(\mu) = D = \sum_{k=1}^m \gamma_k E_{kk}$ , де  $\gamma_i = -\lambda\mu^{-1}$ ,  
 $\gamma_j = -\lambda^{-1}\mu$ ,  $\gamma_k = 1$  при  $k \neq i, k \neq j$ .

**Властивість 4.10**

Нормальна матриця  $L_{ij}(\lambda)$  має обернену матрицю  $L_{ij}(-\lambda)$ .

Ця властивість є наслідком попередньої.

**Властивість 4.11**

Якщо  $i \neq j$ , то  $F_{ij}(\lambda) F_{ji}(-\lambda^{-1}) F_{ij}(\lambda) = L_{ij}(\lambda)$ .

**Властивість 4.12**

$$F_{ij}(\lambda) F_{ji}(-\lambda^{-1}) = L_{ij}(\lambda) F_{ij}(-\lambda).$$

**Властивість 4.13**

Якщо  $k \neq j$ , то

$$\begin{aligned} L_{ij}(\lambda) F_{ik}(\mu) L_{ij}(-\lambda) &= F_{jk}(-\lambda^{-1}\mu); \\ L_{ij}(\lambda) F_{ki}(\mu) L_{ij}(-\lambda) &= F_{kj}(-\lambda\mu) \end{aligned}$$

**Властивість 4.14**

Якщо  $k \neq i$ ,  $i \neq m$ ,  $k \neq j$ ,  $j \neq \mu$ , то

$$L_{ij}(\lambda) F_{km}(\mu) L_{ij}(-\lambda) = F_{km}(\mu)$$

**Властивість 4.15**

$$\begin{aligned} L_{ij}(\lambda) F_{ij}(\mu) L_{ij}(-\lambda) &= F_{ji}(-\lambda^{-2}\mu); \\ L_{ij}(\lambda) F_{ji}(\mu) L_{ij}(-\lambda) &= F_{ij}(-\lambda^{-2}\mu) \end{aligned}$$

**Властивість 4.16**

Якщо  $D$  - діагональна матриця,  $D = \sum_{k=1}^m \gamma_k E_{kk}$ ,  $\gamma_1 \cdot \gamma \dots \gamma_m \neq 0$ , то

$$L_{ij}(\lambda) D = D L_{ij}(\lambda \gamma_i^{-1} \gamma_j).$$

#### *Властивість 4.17*

Якщо  $k \neq j$ , то

$$\begin{aligned} L_{ij}(\lambda) L_{ik}(\mu) &= L_{jk}(-\lambda^{-1} \mu) L_{ij}(\lambda); \\ L_{ij}(\lambda) L_{ik}(\mu) &= L_{ik}(\mu) L_{kj}(-\lambda^{-1} \mu). \end{aligned} \quad (4.2)$$

#### *Властивість 4.18*

Якщо  $k \neq j$ , то

$$\begin{aligned} L_{ij}(\lambda) L_{ki}(\mu) &= L_{kj}(-\lambda \mu) L_{ij}(\lambda); \\ L_{ij}(\lambda) L_{ki}(\mu) &= L_{ki}(\mu) L_{kj}(-\lambda \mu). \end{aligned}$$

# Глава 5. Ранг матриці

## 5.1. Рядковий та стовпцевий ранг матриці

Нехай  $A$  - матриця розміру  $m \times n$  з коефіцієнтами з деякого поля  $F$ . Очевидно рядки матриці  $A$  можна розглядати як вектори лінійного простору  $F^n$ . Аналогічно стовпці цієї матриці можна розглядати як вектори простору  $F^m$ . Наприклад, якщо

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

то її рядки можна розглядати як вектори  $(1, 3, 0, -2)$ ,  $(1, 0, 1, 3)$  і  $(2, 2, 1, 1)$  з простору  $R^4$ . Так само стовпці матриці  $A$  є векторами  $(1, -1, 2)$ ,  $(3, 0, 2)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(-2, 3, 1)$  з  $R^3$ . Тому будемо казати про лінійні комбінації рядків (стовпців), їхню лінійну залежність або незалежність і т.д.

### ОЗНАЧЕННЯ 5.1

Рядковим рангом матриці  $A$  називається ранг її системи векторів-рядків.

Аналогічно визначається стовпцевий ранг матриці  $A$  - це ранг її системи векторів-стовпців.

### ТЕОРЕМА 5.1

Стовпцевий (рядковий) ранг матриці  $A$  не змінюється при множенні цієї матриці зліва і справа на будь-яку матрицю  $H$  потрібного розміру, яка має обернену матрицю.

### Доведення:

Нехай  $A = (a_{ij})$  матриця розміру  $m \times n$ . Позначимо через  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$  - її вектори стовпці:  $\overline{a_j} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ . Розглянемо нульову лінійну комбінацію векторів



$\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n} : \sum_{j=1}^n \gamma_j \overline{a_j} = \overline{0}$ . Будь-яка координата вектора

$\sum_{j=1}^n \gamma_j \overline{a_j}$  дорівнює нулю, тобто  $\sum_{j=1}^n \gamma_j \overline{a_j} = \overline{0}$ ,  $i=1, 2, \dots, m$

Отримані співвідношення можна записати в матричній формі так:

$$A \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ Помножимо тепер зліва отриману рівність на}$$

матрицю  $H$  порядку  $m$ .

$$H \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Очевидно, } H \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Позначивши добуток  $HA$  через  $B$  і скориставшись асоціативністю добутку матриць, отримуємо:

$$(HA) \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Число стовпців в матриці  $HA=B$  дорівнює числу стовпців в матриці  $A$ , тобто дорівнює  $n$ . Позначимо через  $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_n}$  вектори-стовпці матриці  $B$ . Співвідношення (5.1) означає, що  $\sum_{j=1}^n \gamma_j \overline{b_j} = \overline{0}$ . Таким чином, якщо деяка лінійна комбінація

векторів-стовпців матриці  $A$  є нульовою,  $\sum_{j=1}^n \gamma_j \bar{a}_j = \bar{0}$ , то така ж лінійна комбінація векторів стовпців матриці  $B$  також є нульовою,  $\sum_{j=1}^n \gamma_j \bar{b}_j = \bar{0}$ . За лемою 3.4, стовпцевий ранг матриці

$B$  не більший за стовпцевий ранг матриці  $A$ . З іншої сторони,  $A=H^l B$  і за доведеним стовпцевий ранг  $A$  не більший за стовпцевий ранг  $B$ . Отже, стовпцеві ранги матриць  $A$  і  $B$  співпадають. Отже, стовпцевий ранг не міняється при множенні матриці  $A$  зліва на матрицю, яка має обернену матрицю.

Нехай тепер  $C=AH$ , де  $H=(h_{ij})$  - матриця порядку  $m$ , яка має обернену матрицю. Тоді, якщо  $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n$  - вектори-стовпці матриці  $C$ , то  $\bar{c}_i = \sum_{j=1}^m h_{ji} \bar{a}_j$ . Таким чином система

векторів-стовпців матриці  $C$  лінійно виражається через систему векторів-стовпців матриці  $A$ . Тому, за лемою 2.2, стовпцевий ранг матриці  $C$  не перевищує стовпцевого рангу матриці  $A$ . З того, що матриця  $H$  має обернену матрицю, то  $A=CH^l$ , і за доведеним стовпцевий ранг матриці  $A$  не більший за стовпцевий ранг матриці  $C$ . Отже, їх стовпцеві ранги рівні. Аналогічно доводиться рівність рядкових рангів.

## ОЗНАЧЕННЯ 5.2

Ступінчатою матрицею будемо називати таку матрицю  $A=(a_{ij})$  розміру  $m \times n$ , яка задовольняє наступним умовам:

1. Якщо  $a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{ik-1}$ , але  $a_{ik} \neq 0$ , то  $a_{ij} = 0$  для всіх  $l > i$  і  $j \leq k$ ;
2. Якщо рядок з номером  $j$  матриці  $A$  - нульовий, то всі рядки цієї матриці з номерами, більшими ніж  $j$ , також нульові.

## ПРИКЛАД 5.1

Ступінчатою буде, наприклад, матриця

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Нульову матрицю також будемо називати ступінчатою.

## ТЕОРЕМА 5.2

Рядковий ранг ступінчатої матриці дорівнює її стовпцевому рангу і дорівнює кількості ненульових рядків цієї матриці.

### Доведення:

Нехай  $A = (a_{ij})$  - ступінчата матриця розміру  $m \times n$  і  $k$  - число ненульових рядків матриці  $A$ ,  $0 \leq k \leq m$ . Якщо  $k=0$ , то матриця  $A$  - нульова, і її рядковий і стовпцевий ранги дорівнюють нулю. В цьому випадку теорема справедлива. Припустимо, що  $k \geq 1$ . Так як лінійно незалежна система векторів не містить нульовий вектор, то рядковий ранг матриці  $A$  не перевищує  $k$ . Щоб довести, що цей ранг дорівнює  $k$ , встановимо лінійну незалежність перших  $k$  рядків матриці  $A$ . Позначимо ці рядки

через  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_k}$ . Нехай  $\sum_{i=1}^k \mu_i \overline{a_i} = \overline{0}$ . Допустимо, що  $s$  такий

номер, для якого  $a_{1s} \neq 0$ ,  $a_{1i} = 0$  при  $i < s$ . За означенням ступінчатої матриці,  $a_{js} = 0$  для всіх  $j > 1$ . Випишемо  $s$ -ту

координату вектора  $\sum_{i=1}^k \mu_i \overline{a_i} = \overline{0}$ :  $0 = \sum_{i=1}^k \mu_i a_{is} = \mu_1 a_{1s}$ , тому, що

$a_{js} = 0$  для  $j > 1$ . З умови  $a_{1s} \neq 0$  отримаємо, що  $\mu_1 = 0$ . Нехай вже доведено, що  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{l-1} = 0$ . Встановимо, що  $\mu_l$  також дорівнює нулю. Справді, нехай  $r$  таке натуральне число, що  $a_{lr} \neq 0$ , але  $a_{li} = 0$  при  $i < r$ , тоді  $a_{ji} = 0$  для всіх  $j > r$ ,  $i \leq$ .

Тому  $r$ -та координата вектора  $\sum_{i=1}^k \mu_i \overline{a_i} = \overline{0}$  дорівнює:

$$0 = \sum_{i=1}^k \mu_i a_{ir} = \sum_{i=1}^{l-1} \mu_i a_{ir} + \mu_l a_{lr} + \sum_{i=1}^k \mu_i a_{ir}. \text{ Перша сума в правій}$$

частині отриманого співвідношення дорівнює нулю, так як  $\mu_i = 0$  при  $i < l$ ; остання сума також дорівнює нулю, оскільки  $a_{ir} = 0$  при  $i > l$ . Тому  $\mu_l a_{lr} = 0$ , і так як  $a_{lr} \neq 0$ , то  $\mu_l = 0$ . Таким чином, допущення індукції оправдане, і  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = 0$ . Отже, система перших  $k$  векторів-рядків лінійно незалежна і рядковий ранг матриці  $A$  дорівнює  $k$ . Для доведення того, що стовпцевий ранг матриці  $A$  теж дорівнює  $k$ , розглянемо матрицю  $B$ , яка отримується з матриці  $A$  перестановкою стовпців; при цьому стовпець матриці  $A$ , що містить перший нульовий елемент  $j$ -го рядка матриці  $A$ , стає  $j$ -им стовпцем матриці  $B$ ,  $j < k$ ; решта стовпців входять в матрицю  $B$  після стовпця з номером  $k$  в довільному порядку. Отже, матриця  $B$  має вигляд:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & \dots & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & \dots & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{kk} & \dots & b_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

тут  $b_{ii} \neq 0$  при  $i=1, 2, \dots, k$ . Очевидно стовпцеві ранги матриць  $A$  і  $B$  рівні. Ясно, що стовпці матриці  $B$  лінійно виражаються через систему векторів  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}\}$  векторного простору  $F^n$  ( $F$  - основне поле), де  $\overline{e_j}$  - вектор з простору  $F^n$ , у якого  $i$ -та координата дорівнює 1, а інші координати дорівнюють 0. З леми 2.2 випливає, що стовпцевий ранг матриці  $B$  не перевищує  $k$ . Для доведення того, що стовпцевий ранг цієї матриці дорівнює  $k$ , встановимо лінійну незалежність її перших  $k$  стовпців.

Позначимо вказані стовпці через  $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_k}$  і розглянемо нульову лінійну комбінацію цих векторів:  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \overline{b_i} = \overline{0}$ .

Припустимо, ми довели, що  $\lambda_i = 0$  для  $i > s$ , де  $s \leq k$ . Запишемо  $s$ -ту координату вектора  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \overline{b_i} = \overline{0}$ :

$$0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i b_{is} = \sum_{i=1}^{s-1} \lambda_i b_{is} + \lambda_s b_{ss} + \sum_{i=s+1}^k \lambda_i b_{is}.$$

Перша сума в правій частині отриманого співвідношення дорівнює нулю, тому що  $b_{is} = 0$  при  $i < s$ ; остання сума також дорівнює нулю, оскільки  $\lambda_i = 0$  при  $i > s$ . Тому  $\lambda_s b_{ss} = 0$ , і так як  $b_{ss} \neq 0$ , то  $\lambda_s = 0$ . Таким чином, допущення індукції правильне, і  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k = 0$ . З наведених міркувань випливає, що стовпцевий ранг матриці  $B$ , а значить матриці  $A$ , дорівнює  $k$ .

Теорема доведена.

## ТЕОРЕМА 5.3

Будь-яку матрицю  $A$  за допомогою множення зліва на елементарні матриці  $F_{ij}(\lambda)$  потрібного розміру можна привести до ступінчатого виду.

Доведення теореми по суті викладено в главі 1, в алгоритмі виключення змінних.

## Наслідок 5.1

Рядковий і стовпцевий ранги довільної матриці рівні між собою.

Твердження наслідку випливає з теорем 5.1, 5.2 і 5.3.

## ОЗНАЧЕННЯ 5.3

Рангом матриці  $A$  називається її рядковий (стовпцевий) ранг.

## ТЕОРЕМА 5.4

Якщо  $A$  – ступінчата квадратна матриця, то існують такі елементарні матриці  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , що добуток  $AV_1V_2\dots V_k$  є діагональною матрицею.

### Доведення:

Алгоритм елементарних перетворень, потрібних для діагоналізації матриць, наведений а гл.1.

## ТЕОРЕМА 5.5

Ранг добутку матриць не перебільшує рангу кожного з її співмножників.

### Доведення:

Достатньо довести теорему для двох її співмножників. Нехай  $C=AB$ , де  $A=(a_{ij})$  - матриця розміру  $k \times m$ ,  $B=(b_{ij})$  - матриця розміру  $m \times n$ , і  $C=(c_{ij})$  - матриця розміру  $k \times n$ . За

означенням добутку матриць,  $c_{ij} = \sum_{s=1}^m a_{is} b_{sj}$ . Якщо зафіксувати

індекс  $i$ , але змінювати індекс  $j$ , то скаляри  $c_{ij}$  будуть координатами вектора-рядка матриці  $C$  з номером,  $i$ . Звідси випливає, що  $i$ -тий рядок  $\bar{c}_i$  матриці  $C$  є лінійною комбінацією рядків матриці

$B$ ,  $\bar{c}_i = \sum_{s=1}^m a_{is} \bar{b}_s$   $i=1, 2, \dots, k$ . В силу 3.2, ранг матриці  $C$  не

перебільшує рангу матриці  $B$ . Так само можна довести, що стовпці матриці  $C$  лінійно виражаються через стовпці матриці  $A$ , і, значить, ранг матриці  $C$  не перебільшує рангу матриці  $A$ .

Теорему доведено.

### ОЗНАЧЕННЯ 5.5.

Квадратна матриця порядку  $n$  називається невиродженою, якщо її ранг дорівнює  $n$ .

### ТЕОРЕМА 5.6.

Якщо  $A$  не вироджена квадратна матриця, то існують такі елементарні матриці  $U_1 U_2 \dots U_r$ , що  $U_1 U_2 \dots U_r A$  буде діагональною.

*Доведення:*

Алгоритми приведення матриці до ступінчатого вигляду та діагоналізації матриці наведені в главі 1.

### ОЗНАЧЕННЯ 5.6

Будь-яка діагональна матриця  $D$ , що отримана з матриці  $A$  множенням на елементарні матриці, називається діагональною формою матриці  $A$ .

### ЛЕМА 5.1

Якщо матриця  $A = U_1 U_2 \dots U_k$ , де  $U_i$  - елементарна матриця, то  $A$  - має обернену матрицю, причому  $A^{-1} = W_1 W_2 \dots W_k$ , і  $W_i = U_{k-i+1}^{-1}$  - елементарна матриця.

*Доведення:*

Безпосередньою перевіркою можна впевнитись, що  $A W_1 W_2 \dots W_k = E$ , тобто матриця  $W_1 W_2 \dots W_k$  є оберненою для матриці  $A$ . В силу властивості 3.2, матриця  $W_i$  є елементарною,  $i=1, 2, \dots, k$ .

Лема доведена.

### ТЕОРЕМА 5.7

Квадратна матриця  $A$  порядку  $n$  має обернену матрицю тоді і тільки тоді, коли матриця  $A$  не вироджена.

*Доведення:*

*Необхідність.*

Нехай матриця  $A$  має обернену матрицю. Тоді існує така матриця  $X$ , що  $AX = XA = E$ . Очевидно ранг одиничної матриці  $E$

дорівнює  $n$ , ранг матриці  $A$  не перевищує  $n$  (в системі векторів - рядків матриці  $A$  рівно  $n$  елементів). З іншого боку, ранг матриці  $E$ , в силу теореми 5.5, не перевищує ранга матриці  $A$ . Тому ранг матриці  $A$  дорівнює  $n$  і  $A$  - невироджена матриця.

*Достатність.*

Нехай матриця  $A$  - невироджена. В силу теореми 5.2,  $V_1 V_2 \dots V_k A = D$ , де  $D$  - діагональна матриця, в якій всі  $n$  елементів головної діагоналі відмінні від нуля (ранг матриці  $A$  дорівнює  $n$ ). В цьому випадку матриця  $D$  має обернену матрицю. Нехай  $D^{-1}$  - матриця, обернена матриці  $D$ . Тоді  $D^{-1} V_1 V_2 \dots V_k A = E$ . Отже, матриця  $A$  має обернену матрицю  $A^{-1} = D V_1^{-1} V_2^{-1} \dots V_n^{-1}$ . Теорема доведена.

## 5.2 Визначник матриці

### ОЗНАЧЕННЯ 5.7

Підстановкою натуральних чисел  $1, 2, \dots, n$  називають таблицю виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \text{ де } i_k \in 1, \dots, n \text{ і } j_j \neq i_k \text{ при } j \neq k. \quad (5.2)$$

Число  $n$  називають порядком підстановки.

Таким чином, перший рядок підстановки містить всі натуральні числа від  $1$  до  $n$ , в їх висхідному порядку (порядку зростання), а другий рядок – всі ті самі числа, але розташовані в деякому іншому порядку.

Кожна підстановка визначає взаємно-однозначне відображення множини чисел  $1 \dots n$  на себе.

Разом з терміном „підстановка” ми будемо використовувати термін „перестановка”. Тим самим ми підкреслюємо, що другий рядок підстановки (або перестановки) можна отримати, переставляючи місцями елементи першого рядка.



Оскільки в підстановці порядку  $n$  перший рядок завжди той самий, можна замість запису (5.2) використовувати запис тільки другого рядка -  $(i_1 i_2 \dots i_n)$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 5.7

Підстановку виду  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$  називають транспозицією (елементів  $i$  та  $j$ ).

Транспозиція означає перестановку місцями двох елементів. Очевидно, будь-яку перестановку можна здійснити, виконавши послідовно декілька транспозицій. Ми не будемо доводити цього.

### ОЗНАЧЕННЯ 5.8

Перестановка  $(i_1 i_2 \dots i_n)$  називається парною, якщо її можна здійснити за допомогою парного числа транспозицій.

Перестановка  $(i_1 i_2 \dots i_n)$  називається непарною, якщо її можна здійснити за допомогою непарного числа транспозицій.

### ЗАУВАЖЕННЯ

Взагалі кажучи, дану перестановку можна отримати, виконуючи транспозиції, різними способами. Тому треба довести, що означення 5.8 є коректним. Кількість транспозицій, за допомогою яких можна отримати дану перестановку, якщо не довести протилежного, може розрізнятися парністю. Однак в теорії підстановок доводиться, що *означення парності підстановки є коректним*.

Для подальшого викладення введемо наступні позначення:

Для довільної перестановки  $(i_1 i_2 \dots i_n)$  позначимо

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{якщо підстановк } a (i_1 i_2 \dots i_n) \text{ парна;} \\ -1, & \text{якщо підстановк } a (i_1 i_2 \dots i_n) \text{ непарна} \end{cases} \quad (5.3)$$

Множину всіх підстановок порядку  $n$  позначимо через  $S_n$ .  
Неважко довести методом математичної індукції, що кількість елементів множини  $S_n$  дорівнює  $n! : |S_n| = n!$ .

Нехай тепер  $A = (\alpha_{ij})$ -матриця розміру  $n \times n$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 5.8

Визначником матриці  $A$  називається скаляр

$$|A| = \sum_{(i_1 i_2 \dots i_n) \in S_n} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot \alpha_{1i_1} \alpha_{2i_2} \dots \alpha_{ni_n} \quad (5.4)$$

Підкреслимо, що означення визначника є коректним тільки для квадратних матриць.

Зверніть увагу на ліву частину формули (5.4). Визначник матриці  $A$  позначається за допомогою прямих дужок:  $|A|$ . Поряд з цим позначенням часто використовують і таке:  $\det(A)$ .

Формула визначника є сумою, яка містить  $n!$  доданків. Кожен доданок є добутком  $n$  елементів матриці  $A$ , причому кожен з елементів береться зі свого рядка та свого стовпчика. В доданку  $\alpha_{1i_1} \alpha_{2i_2} \dots \alpha_{ni_n}$  елемент  $\alpha_{1i_1}$  належить першому рядку, елемент  $\alpha_{2i_2}$  належить другому рядку, причому його стовпчик не є стовпчиком першого елемента, елемент  $\alpha_{3i_3}$  належить третьому рядку, причому його стовпчик не є ні стовпчиком першого елемента, ні стовпчиком другого елемента, і так далі. Нарешті, кожен з доданків входить в суму (5.4) зі знаком плюс або мінус. Якщо підстановка  $(i_1 i_2 \dots i_n)$  є парною, доданок  $\alpha_{1i_1} \alpha_{2i_2} \dots \alpha_{ni_n}$  входить до суми зі знаком плюс, якщо ж ні – зі знаком мінус.

Розглянемо як приклад формулу визначника  $3 \times 3$  матриці  $A$ :

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{11} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{33} + \\ + \alpha_{12} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{31} - \alpha_{13} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{31} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32}$$

Для того, щоб визначити знаки доданків, розглянемо  $3! = 6$  перестановок індексів (1, 2, 3):

(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).

Перестановки (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) парні. Відповідні доданки беруться зі знаком плюс. Перестановки (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1) непарні. Відповідні доданки беруться зі знаком мінус. Отже,

$$\det(A) = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \\ - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}$$

Оскільки обчислювати парність відповідної підстановки незручно, наведемо більш зручне представлення визначника.

### ОЗНАЧЕННЯ 5.9

Мінором  $k$ -го порядку матриці  $A$  називається визначник матриці  $B$  розміру  $k \times k$ , який складається з виділених  $k$  рядків і стовпців матриці  $A$ , розміщених в тому ж порядку, що і в матриці  $A$ .

Розглянемо тепер мінори порядку  $n-1$ , які отримуються з матриці  $A$  викресленням першого рядка і  $j$ -того стовпця  $A$ , для всіх  $j$  від 1 до  $n$ . Позначимо їх через  $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ . Ці мінори будемо називати мінорами першого рядка.

### ТЕОРЕМА 5.8

$$\det(A) = \alpha_{11}A_{11} - \alpha_{12}A_{12} + \dots + (-1)^{1+j}\alpha_{1j}A_{1j} + \dots + (-1)^{1+n}\alpha_{1n}A_{1n} \quad (5.5)$$

*Доведення*

В сумі (5.4) для кожного елемента 1-го рядка  $\alpha_{1j}$  сгрупуємо всі доданки, які містять множник  $\alpha_{1j}$ . Отримаємо:

$$\text{Det}(A) = \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} B_j. \text{ Неважко побачити, що суми } B_j \text{ з точністю}$$

до знаку є мінорами  $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ .

Для того, щоб уточнити знаки доданків в сумі (5.5), розглянемо множину всіх підстановок  $S_n$ . Нехай  $S_n^j$  - підмножини  $S_n$ , які містять всі перестановки виду  $(j, i_2 i_3 \dots i_n)$  для  $j=1, \dots, n$ .

$$S_n = S_n^1 \cup S_n^2 \cup \dots \cup S_n^n.$$

Зауважимо, що підстановки з  $S_n^j$  відповідають доданку  $\alpha_{1j} A_{1j}$ . З іншого боку, знак доданку в мінорі  $A_{1j}$  визначається парністю підстановки  $(i_2 i_3 \dots i_n)$ . Ця підстановка отримана з  $(j, i_2 i_3 \dots i_n)$  викресленням індексу  $j$ . Вставимо в підстановку  $(i_2 i_3 \dots i_n)$  індекс  $j$  на  $j$ -те місце. Оскільки  $j$  стоїть тепер на „своєму” місці, парність підстановки  $(i_2 i_3 \dots j \dots i_n)$  співпадає з парністю  $(i_2 i_3 \dots i_n)$ . Ми переставили таким чином індекс  $j$  з 1-го на  $j$ -те місце. Оскільки це можна зробити за допомогою  $j-1$  транспозицій, доданки  $\alpha_{1j} A_{1j}$  входять в суму (5.5) з плюсом, якщо  $j-1$  парне, або з мінусом, якщо  $j-1$  непарне. Теорему доведено.

### 5.3 Визначники та елементарні перетворення.

Сформулюємо тепер декілька властивостей визначників, які є безпосередніми наслідками означення (5.8).

Властивість 5.1

$$\det(A) = \det(A')$$

*Доведення.*

Неважко побачити, що формула визначника в (5.4) не зміниться, якщо транспонувати матрицю  $A$ .

*Зауваження.*

З властивості 5.1 випливає, що в теорії визначників рядки і стовпці матриці приймають участь на рівних засадах. Якщо в деякому істинному твердженні про визначник матриці замінити слово „рядок” на „стовпець”, це твердження залишиться істинним.

Властивість 5.2

Якщо матриця  $A$  містить нульовий рядок (стовпчик),  
 $\det(A) = 0$

*Доведення.*

В цьому випадку кожен з доданків суми (5.4) буде мати 0 в якості співмножника.

Властивість 5.3

Якщо один з рядків (стовпців) матриці помножито на скаляр  $\alpha$ , визначник цієї матриці помножиться на цей скаляр.

*Доведення очевидне.*

Властивість 5.4

Якщо в матриці є рівні рядки (стовпці), визначник цієї матриці дорівнює нулю.

*Доведення*

Припустимо, що в матриці  $A$  рівні  $j$ -тий та  $k$ -тий рядки. Розглянемо доданки в означенні 5.8:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots j \dots k \dots i_n} \alpha_{1i_1} \dots \alpha_{ji_j} \dots \alpha_{ki_k} \dots \alpha_{ni_n} \text{ і } \varepsilon_{i_1 i_2 \dots k \dots j \dots i_n} \alpha_{1i_1} \dots \alpha_{ki_k} \dots \alpha_{ji_j} \dots \alpha_{ni_n}$$

Оскільки за припущенням  $\alpha_{ji_j} = \alpha_{ki_k}$ , добутки елементів матриці в цих доданках рівні:  $\alpha_{1i_1} \dots \alpha_{ji_j} \dots \alpha_{ki_k} \dots \alpha_{ni_n} = \alpha_{1i_1} \dots \alpha_{ki_k} \dots \alpha_{ji_j} \dots \alpha_{ni_n}$ .

Далі, перестановку індексів одного з доданків можна отримати з перестановки індексів іншого транспозицією  $\begin{pmatrix} 1 \dots i \dots j \dots n \\ 1 \dots j \dots i \dots n \end{pmatrix}$ . Це

означає, що  $\varepsilon_{i_1 \dots j \dots k \dots i_n} = - \varepsilon_{i_1 \dots k \dots j \dots i_n}$ . Отже, розглянуті доданки взаємно знищуються. В силу довільності розглянутої пари, вся сума (5.4) дорівнює нулю.

#### Властивість 5.5

Якщо в матриці переставити місцями два рядки (стовпця), визначник матриці поміняє свій знак на протилежний.

*Доведення* цілком аналогічне попередньому.

#### Властивість 5.6

Використавши властивість 5.5, можна узагальнити формулу (5.5), розклавши визначник по мінорам  $i$ -того рядка:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij} A_{ij} \quad (5.6)$$

*Доведення* є безпосереднім наслідком теореми 5.8 та властивості 5.5..

#### Властивість 5.7

Якщо над рядками (стовпцями) матриці здійснити елементарне перетворення  $F_{ij}(\lambda)$ , визначник матриці не зміниться.

*Доведення*

Застосуємо формулу 5.6 до  $i$ -того рядка перетвореної матриці  $A'$ ,

$$\det(A') = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} (\alpha_{ik} + \lambda \alpha_{jk}) A_{ik} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \alpha_{ik} A_{ik} + \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \lambda \alpha_{jk} A_{ik}$$

$$\det(A') = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} (\alpha_{ik} + \lambda \alpha_{jk}) A_{ik} = \det(A) + \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \lambda \alpha_{jk} A_{ik};$$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \lambda \alpha_{jk} A_{ik} = \lambda \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \alpha_{jk} A_{ik} = \lambda \cdot 0 = 0, \text{ оскільки ця сума є ви-}$$

значником матриці з однаковими рядками – і-тим та j-тим. Тому  $\det(A') = \det(A)$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 5.10

Алгебраїчним доповненням  $A'_{ij}$  елементу  $\alpha_{ij}$  квадратної матриці  $A$  називається вираз  $(-1)^{i+j} A_{ij}$ .

В термінах алгебраїчних доповнень можна переписати формулу (5.6):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} A'_{ij} \quad (5.7)$$

### Властивість 5.8

Визначник діагональної матриці дорівнює добутку її діагональних елементів.

*Доведення* очевидне.

### Властивість 5.9

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці  $A$  на алгебраїчні доповнення елементів другого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

*Доведення:*

Розглянемо суму  $\sum_{r=1}^n \alpha_{ir} A'_{ir}$ . Нехай  $B$  - матриця, яка

отримана з матриці  $A$  заміною рядка з номером  $j$  на рядок з номером  $i$ ; інші рядки матриць  $A$  і  $B$  співпадають. Визначник

матриці  $B$  дорівнює нулю, тому що  $i$ -тий та  $j$ -тий рядки цієї матриці співпадають. З іншого боку, алгебраїчні доповнення для відповідних елементів  $j$ -го рядка матриць  $A$  і  $B$  також співпадають. За означенням 5.10 маємо

$$\sum_{r=1}^n \alpha_{ir} A_{jr} = 0. \quad (5.8)$$

### **Алгоритм обчислення визначника матриці**

Властивості 5.2 – 5.7 визначають алгоритм обчислення визначника квадратної матриці. Це - алгоритм діагоналізації матриці. Зауважимо, що він потребує значно менших обчислень, ніж алгоритм обчислення „за означенням”, тобто за формулою (5.4) або (5.5).

#### **ТЕОРЕМА 5.9**

Квадратна матриця є невиродженою тоді і тільки тоді, коли її визначник відмінний від нуля.

*Необхідність.*

Якщо  $A$  - квадратна матриця порядку  $n$  є невиродженою, то за означенням її ранг дорівнює  $n$ , а значить всі діагональні елементи в її діагональній формі відмінні від нуля, оскільки діагональна форма є ступінчатою матрицею. Тому визначник матриці  $A$  також відмінний від нуля.

*Достатність.*

Якщо визначник квадратної матриці  $A$  не дорівнює нулю, то її діагональна форма є ступінчатою матрицею. Так як визначник матриці  $A$  не дорівнює нулю, то в її діагональній формі немає нульових рядків. Отже, її ранг дорівнює  $n$ , за означенням матриця  $A$  невироджена.

Теорема доведена.

#### **ТЕОРЕМА 5.10**

Визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць:



$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

*Доведення.*

Достатньо цю властивість довести для двох співмножників  $A$  і  $B$ . Якщо одна з матриць вироджена, наприклад  $A$ , то в силу теореми 4.5 виродженою також буде матриця  $AB$ . Тому  $|AB|=0$ ,  $|A||B|=0$ . В цьому випадку дана властивість справедлива.

Нехай  $A$  і  $B$  не вироджені матриці. Приведемо матрицю  $A$  елементарними перетвореннями до діагонального виду  $dA$ . Послідовність елементарних перетворень визначає таку матрицю  $L$ , що  $L \cdot A = dA$ . Розглянемо матрицю  $L \cdot A \cdot B$ . Оскільки елементарні перетворення не змінюють визначника матриці,

$$|A \cdot B| = |L \cdot (A \cdot B)| = |(L \cdot A) \cdot B|.$$

Таким чином, оскільки матриця  $L \cdot A$  діагональна, теорему достатньо довести для випадку, коли матриця  $A$  є діагональною.

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 b_{11} & d_1 b_{12} & \dots & d_1 b_{1n} \\ d_2 b_{21} & d_2 b_{22} & \dots & d_2 b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n b_{n1} & d_n b_{n2} & \dots & d_n b_{nn} \end{pmatrix}$$

За властивістю 5.3 при обчисленні визначника отриманої матриці скаляри  $d_1, \dots, d_n$  можна винести за визначник як множники:

$$\det(A \cdot B) = d_1 \cdot \dots \cdot d_n \cdot \det(B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Теорема доведена.

### ЗАУВАЖЕННЯ

Формула  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$  є алгебраїчною тотожністю. Отже, її можна довести, порівнявши її ліву і праву частини та розглядаючи їх як многочлени від коефіцієнтів  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$  як від змінних (невизначених коефіцієнтів).

### ТЕОРЕМА 5.11

Якщо матриця  $A$  має обернену матрицю, то визначник матриці  $A^{-1}$  дорівнює  $|A|^{-1}$ .

*Доведення.*

Так як  $A^{-1}A=E$  і визначник одиничної матриці дорівнює 1, то  $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ , звідки  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

Теорема доведена.

**ТЕОРЕМА 5.12.**

Ранг матриці дорівнює найбільшому з порядків її мінорів, які не дорівнюють нулю.

*Доведення:*

Нехай  $k$  ранг матриці  $A$  розміру  $m \times n$ ;  $1 \leq k \leq m$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Доведемо, що будь-який мінор матриці  $A$  порядку більшого  $k$  дорівнює нулю. Нехай  $s > k$  і  $B$  - матриця розміру  $s \times s$ , що складається з деяких  $s$  рядків і  $s$  стовпців матриці  $A$ . Так як  $s > k$ , то рядки матриці  $A$ , з яких складається матриця  $B$ , лінійно залежні. Тоді, очевидно, рядки самої матриці  $B$  також лінійно залежні, і її визначник дорівнює нулю. Отже, мінор порядку  $s > k$  дорівнює нулю. Доведемо тепер, що в матриці  $A$  існує мінор порядку  $k$ , який не дорівнює нулю. Так як ранг матриці  $A$  дорівнює  $k$  то існує  $k$ , лінійно незалежних рядків матриці  $A$ . Складемо з них матрицю  $A_1$ ; розмір матриці  $A$  дорівнює  $k \times n$ . Очевидно, ранг матриці  $A_1$  також дорівнює  $k$ . Тому в матриці  $A_1$  є  $k$  лінійно незалежних стовпців. Складемо з цих стовпців матрицю  $B$  розміру  $k \times k$ . Ранг матриці  $B$  також дорівнює  $k$  і, в силу теореми 4.7, її визначник, який є мінором матриці  $A$   $k$ -го порядку, не дорівнює нулю.

Теорема доведена.

**ТЕОРЕМА 5.13.**

Якщо  $A=(a_{ij})$  не вироджена квадратна матриця,  $A^{-1}$  - алгебраїчне доповнення до елементу  $a_{ij}$ , то матриця  $A^{-1}$  має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

*Доведення:*

Якщо  $A^{-1}=(u_{ij})$ ,  $AA^{-1}=(t_{ij})$ , то згідно з правилом множення матриць  $t_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{A_{jk}}{|A|}$ ; в силу (5.7), (5.8),  $t_{ij}=1$ , якщо  $i=j$ , і  $t_{ij}=0$ , якщо  $i \neq j$ . Отже  $AA^{-1}=E$ .

Теорему доведено.

### Алгоритм обчислення оберненої матриці

Теорема 5.13 визначає обернену матрицю у явному вигляді – тобто формулою. Проте використовувати цю формулу як алгоритм обчислення оберненої матриці недоцільно, оскільки він потребує значних обчислень. Як і практично всі алгоритми цієї книги, алгоритм обернення є по суті алгоритмом діагоналізації матриці. Він потребує значно менших обчислень, ніж алгоритм обчислення „за означенням”, тобто за формулою (5.9). В главі 11 неведено приклад застосування цього алгоритму. Зараз ми викладемо його в загальному виді.

Для того, щоб обчислити матрицю, обернену до квадратної матриці  $A$ ,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

1. побудуємо розширення цієї матриці виду:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Ця матриця є висхідною для алгоритму.

2. Елементарними перетвореннями будемо перетворювати основну (ліву) половину цієї матриці до одиничної матриці.
3. Якщо процес діагоналізації „пройде” до кінця, на місці висхідної матриці отримаємо матрицю

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix}$$

Вихід:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix}$$

В протилежному випадку матриця  $A$  не має оберненої.

## Глава 6. Лінійні оператори

Нехай  $U$  - скінченномірний простір над деяким полем  $F$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 6.1

Лінійним оператором, визначеним на просторі  $U$ , називається відображення  $\varphi$  простору  $U$  на себе, що задовольняє умовам:

1. Для будь-яких векторів  $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in U$ ,

$$\varphi(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = \varphi(\bar{a}_1) + \varphi(\bar{a}_2);$$

2. Для будь-якого  $\bar{a} \in U$  і будь-якого  $\lambda \in F$ ,

$$\varphi(\lambda \bar{a}) = \lambda \varphi(\bar{a}).$$

### ПРИКЛАДИ.

- 1) Нехай  $U$  - довільний векторний простір над полем  $F$  і  $\bar{a} \in F$ . Нехай  $\varphi(\bar{u}) = \alpha \bar{u}$  для будь-якого  $\bar{u} \in U$ . Очевидно  $\varphi$  - лінійний оператор, який діє в просторі  $U$ .
- 2) Нехай  $U$  - множина многочленів степеня не вищого за  $n$  над полем дійсних чисел  $\mathbb{R}$ . Нехай  $\varphi(f(x)) = f'(x)$ , де  $f(x) \in U$ . З властивостей дії диференціювання випливає, що  $\varphi$  - лінійний оператор, який діє в просторі  $U$ .

#### **Найпростіші властивості лінійних операторів**

- 1) Якщо  $\varphi$  - лінійний оператор, який діє в просторі  $U$ , то  $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$ .

$$\text{Дійсно, } \varphi(\bar{0}) = \varphi(0 \bar{a}) = 0 \varphi(\bar{a}) = \bar{0}.$$

- 2)  $\varphi\left(\sum_{i=1}^k a_i \bar{u}_i\right) = \sum_{i=1}^k a_i \varphi(\bar{u}_i).$

Впливає безпосередньо з означення лінійного оператора. Властивість 2 означає, що дія лінійного оператора на просторі  $U$  однозначно визначається його дією на базисі простору. Більш того, справедлива така теорема.

## ТЕОРЕМА 6.1

Нехай  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  - базис векторного простору  $U$  над полем  $F$  і  $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$  - довільна система векторів цього простору. Тоді існує єдиний лінійний оператор  $\varphi$  простору  $U$ , для якого має місце рівність:  $\varphi(\bar{e}_i) = \bar{u}_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ .

### Доведення:

Нехай  $\bar{x} \in U$ ,  $\bar{x}$  - довільний вектор. Тоді  $\bar{x} = \sum_{i=1}^k a_i \bar{e}_i$ ,

покладемо  $\varphi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^k a_i \bar{u}_i$ . Безпосередньо перевіряється, що відображення  $\varphi$  векторного простору  $U$  в себе задовольняє умовам 1 і 2 означення лінійного оператора, причому  $\varphi(\bar{e}_i) = \bar{u}_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . Отже,  $\varphi$  - лінійний оператор, який діє в просторі  $U$ . Оператор  $U$  із заданими властивостями єдиний, що очевидно.

## ОЗНАЧЕННЯ 6.2

Ядром лінійного оператора  $\varphi$ , який діє в просторі  $U$ , називається множина всіх векторів з  $U$ , кожен з яких оператором  $\varphi$  відображається в нульовий вектор.

## ТЕОРЕМА 6.2

Ядро лінійного оператора  $\varphi$ , який діє в просторі  $U$  над полем  $F$ , є підпростором простору  $U$ .

### Доведення:

Нехай  $V$  - ядро лінійного оператора  $\varphi$ . За властивістю 1,  $\bar{0} \in V$ , тобто  $V$  - непорожня множина. Якщо  $\bar{u}_1 \in V$ ,  $\bar{u}_2 \in V$ ,  $\alpha \in F$ , то  $\varphi(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = \varphi(\bar{u}_1) + \varphi(\bar{u}_2) = \bar{0}$ ;  $\varphi(\alpha \bar{u}_1) = \alpha \varphi(\bar{u}_1) = \alpha \bar{0} = \bar{0}$ . Згідно з теоремою 3.2,  $V$  - підпростір простору  $U$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 6.3.

Дефектом лінійного оператора називається розмірність ядра цього оператора.

### ОЗНАЧЕННЯ 6.4.

Образом лінійного оператора  $\varphi$ , який діє в просторі  $U$  над полем  $F$ , називається множина  $S$  векторів  $\bar{u} \in U$ , таких, що  $\bar{u} = \varphi(\bar{a})$ , для деякого  $\bar{a} \in U$ .

Образ лінійного оператора  $\varphi$  будемо позначати через  $\text{Im } \varphi = \{ \varphi(\bar{u}) | \bar{u} \in U \}$ .

### ТЕОРЕМА 6.3.

Образ лінійного оператора  $\varphi$ , який діє в просторі  $U$  над полем  $F$ , є підпростором простору  $U$ .

#### Доведення:

В силу властивості 6.1  $\bar{0} \in \text{Im } \varphi$ , тому  $\text{Im } \varphi$  - непорожнє. Нехай  $\bar{u}_1 \in \text{Im } \varphi$ ,  $\bar{u}_2 \in \text{Im } \varphi$ ,  $\lambda \in F$ . За означенням образу лінійного оператора  $\varphi$ , в просторі  $U$  існують такі вектори  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ , що  $\bar{u}_i = \varphi(\bar{v}_i)$ ,  $i=1,2$ . Тоді  $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = \varphi(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) \in \text{Im } \varphi$ ,  $\lambda \bar{u}_1 = \lambda \varphi(\bar{v}_1) = \varphi(\lambda \bar{v}_1) \in \text{Im } \varphi$ . За теоремою 3.2,  $\text{Im } \varphi$  є підпростором простору  $U$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 6.5.

Розмірність образу лінійного оператора  $\varphi$ , який діє на просторі  $U$ , називається рангом оператора  $\varphi$ .

### ТЕОРЕМА 6.4.

Сума рангу і дефекту лінійного оператора  $\varphi$ , який діє на просторі  $U$  над полем  $F$ , дорівнює розмірності простору  $U$ .

## Доведення:

Нехай  $V$  - ядро лінійного оператора  $\varphi$  і  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m\}$  - базис простору  $V$ ; тут  $m$  - дефект лінійного оператора  $\varphi$ ,  $m \leq n$ , де  $n$  - розмірність простору  $U$ . В силу наслідку 3.4, базис підпростору  $U$  можна доповнити до базису всього простору  $U$ ; нехай  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_{n-m}\}$  - базис простору  $U$ . Нехай  $\bar{g}_i = \varphi(\bar{f}_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, n-m$ , і доведемо, що  $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_{n-m}\}$  - базис підпростору  $\text{Im } \varphi$ . Нехай  $\sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i \bar{g}_i = \bar{0}$ ; тоді  $\sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i \varphi(\bar{f}_i) = \bar{0}$ ,

або  $\sum_{i=1}^{n-m} \varphi(\gamma_i \bar{f}_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i \bar{f}_i) = \bar{0}$ . Тому  $\sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i \bar{f}_i \in V$ , а

значить,  $\sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i \bar{f}_i = \sum_{j=1}^m \beta_j \bar{e}_j$ , або  $\sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i \bar{f}_i + \sum_{j=1}^m (-\beta_j) \bar{e}_j = \bar{0}$ .

Так як  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_{n-m}\}$  - базис простору  $U$ , то всі коефіцієнти в отриманій лінійній комбінації дорівнюють нулю. Наприклад,  $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = \dots = \bar{\gamma}_{n-m} = \bar{0}$ . Тому система векторів  $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_{n-m}\}$  лінійно незалежна. Нехай  $\bar{u} \in \text{Im } \varphi$ . Тоді

$\bar{u} = \varphi(\bar{v})$ , для деякого  $\bar{v} \in U$ ;  $\bar{v} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \bar{e}_j + \sum_{i=1}^{n-m} \alpha_i \bar{f}_i$ . Тому

$\bar{u} = \varphi(\bar{v}) = \varphi(\sum_{j=1}^m \lambda_j \bar{e}_j + \sum_{i=1}^{n-m} \alpha_i \bar{f}_i) = \sum_{i=1}^{n-m} \alpha_i \bar{g}_i$ , так як  $\varphi(\sum_{j=1}^m \lambda_j \bar{e}_j) = \bar{0}$ .

Отже,  $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_{n-m}\}$  - максимальна лінійно незалежна система векторів  $\text{Im } \varphi$ . Тому ранг  $r$  оператора  $\varphi$  дорівнює  $n-m$ ;  $r=n-m$ . Звідси  $r+m=n$ . Теорема доведена.

**ОЗНАЧЕННЯ 6.6.**

Нехай  $\varphi_1, \varphi_2$  - лінійні оператори, що діють в просторі  $U$  над полем  $F$ . Сумою  $\varphi_1 + \varphi_2$ , різницею  $\varphi_1 - \varphi_2$ , добутком  $\lambda \varphi_1$  на скаляр  $\lambda$  оператора  $\varphi_1$  і добутком  $\varphi_1 \varphi_2$  операторів  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$



називаються відображення простору  $U$  в себе, визначені відповідно за формулами: для будь-якого  $\bar{u} \in U$ ,

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(\bar{u}) = \varphi_1(\bar{u}) + \varphi_2(\bar{u});$$

$$(\varphi_1 - \varphi_2)(\bar{u}) = \varphi_1(\bar{u}) - \varphi_2(\bar{u});$$

$$(\lambda \varphi_1)(\bar{u}) = \lambda \varphi_1(\bar{u});$$

$$(\varphi_1 \varphi_2)(\bar{u}) = \varphi_1(\varphi_2(\bar{u})).$$

## ТЕОРЕМА 6.5.

Всі відображення, задані в означенні 6.6, є лінійними операторами, які діють в просторі  $U$  над полем  $F$ .

### Доведення:

Доведемо теорему, наприклад, для відображення  $\varphi_1 \varphi_2$ .

1) Нехай  $\lambda \in F$ ,  $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in U$ .

$$\begin{aligned} \text{Тоді} \quad & (\varphi_1 \varphi_2)(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = \varphi_1(\varphi_2(\bar{u}_1 + \bar{u}_2)) = \varphi_1(\varphi_2(\bar{u}_1) + \varphi_2(\bar{u}_2)) = \\ & = \varphi_1(\varphi_2(\bar{u}_1)) + \varphi_1(\varphi_2(\bar{u}_2)) = (\varphi_1 \varphi_2)(\bar{u}_1) + (\varphi_1 \varphi_2)(\bar{u}_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \varphi_1 \varphi_2(\lambda \bar{u}_1) = \varphi_1(\varphi_2(\lambda \bar{u}_1)) = \varphi_1(\lambda \varphi_2(\bar{u}_1)) = \lambda \varphi_1(\varphi_2(\bar{u}_1)) = \lambda ( \\ & \varphi_1 \varphi_2)(\bar{u}_1). \end{aligned}$$

Тому  $\varphi_1 \varphi_2$  - лінійний оператор, який діє в просторі  $U$  над полем  $F$ .

## ОЗНАЧЕННЯ 6.7.

Нехай  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  базис лінійного простору  $U$ ,  $\varphi$  - лінійний

оператор, який діє у цьому просторі, і  $\varphi(\bar{e}_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \bar{e}_i$ ,  $j=1, 2,$

$\dots, n$ .

Матриця  $A=(a_{ij})=$  
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
 називається матрицею

лінійного оператора  $\varphi$ , що діє в просторі  $U$ , в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ . З означення матриці лінійного оператора  $\varphi$  в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  випливає, що стовпці цієї матриці є коефіцієнтами розкладу векторів  $\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n)$  за базисом  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ .

## ТЕОРЕМА 6.6.

Якщо  $A_i$  - матриця лінійного оператора  $\varphi$ ,  $i=1, 2$ , який діє в просторі  $U$ , в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ , то матрицями лінійних операторів  $\varphi_1 + \varphi_2$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2$ ,  $\lambda \varphi_1$ ,  $\varphi_1 \varphi_2$  будуть відповідно  $A_1 + A_2$ ,  $A_1 - A_2$ ,  $\lambda A_1$ ,  $A_1 A_2$ .

### Доведення:

Якщо  $A_1=(\lambda_{ij})$  - матриця лінійного оператора  $\varphi$ , в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ , то  $\varphi(\bar{e}_j)=\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \bar{e}_i$ . Символічно це будемо

записувати так:  $(\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n))=(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) A_1$ .

Аналогічно,  $(\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n))=(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) A_2$ . Тому

$$\begin{aligned} & ((\varphi_1 + \varphi_2)(\bar{e}_1), (\varphi_1 + \varphi_2)(\bar{e}_2), \dots, (\varphi_1 + \varphi_2)(\bar{e}_n)) = \\ & = (\varphi_1(\bar{e}_1) + \varphi_2(\bar{e}_1), \varphi_1(\bar{e}_2) + \varphi_2(\bar{e}_2), \dots, \varphi_1(\bar{e}_n) + \varphi_2(\bar{e}_n)) = \\ & = (\varphi_1(\bar{e}_1), \varphi_1(\bar{e}_2), \dots, \varphi_1(\bar{e}_n)) + (\varphi_2(\bar{e}_1), \varphi_2(\bar{e}_2), \dots, \varphi_2(\bar{e}_n)) = \\ & = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) A_1 + (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) A_2 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) (A_1 + A_2). \end{aligned}$$

Тут використані властивості дій над матрицями, які зберігаються і для випадку, коли елементами матриці-рядка є вектори простору  $U$ . З отриманої в результаті рівності випливає,

що  $A_1 + A_2$  буде матрицею лінійного оператора  $\varphi_1 + \varphi_2$ . Аналогічно доводиться теорема для операторів  $\varphi_1 - \varphi_2$  і  $\lambda \varphi_1$ . Розглянемо тепер оператор  $\varphi_1 \varphi_2$ . Якщо  $A_1 = (\lambda_{ij})$ ,  $A_2 = (\mu_{ij})$ , то

$$(\varphi_1 \varphi_2)(\bar{e}_k) = \varphi_1(\varphi_2(\bar{e}_k)) = \varphi_1\left(\sum_{j=1}^n \mu_{jk} \bar{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu_{jk} \varphi_1(\bar{e}_j) = \sum_{j=1}^n \mu_{jk} \sum_{i=1}^n \lambda_{ji} \bar{e}_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \mu_{jk} \lambda_{ji}\right) \bar{e}_i. \text{ Якщо } B = (\beta_{ij}) -$$

матриця лінійного оператора  $\varphi_1 \varphi_2$ , то з отриманої рівності

$$\text{випливає, що } \beta_{jk} = \sum_{i=1}^n \mu_{ik} \lambda_{ji}, \text{ тобто } B = A_1 A_2 \text{ це випливає з}$$

означення добутку матриць.

Теорема доведена.

Розв'яжемо тепер таку задачу:

Нехай  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  - базис простору  $U$ , в якому діє лінійний оператор  $\varphi$ . Відомі координати вектора  $\bar{u}$  у цьому базисі. Треба знайти координати вектора  $\varphi(\bar{u})$  у вказаному базисі. Якщо  $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n)$  - координати вектора  $\bar{u}$  у вказаному базисі, то  $\bar{u} = \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \bar{e}_i$ . Символічно це можна записати так:

$$\bar{u} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \\ \dots \\ \bar{\lambda}_n \end{bmatrix}$$

З властивості 6.2 лінійних операторів випливає, що

$$\varphi(\bar{u}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(\bar{e}_i) = (\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n)) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

Нехай  $A$  - матриця оператора  $\varphi$  в цьому ж базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ . Тоді

$$\varphi(\bar{u}) = (\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n)) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

Звідси випливає, що координатний стовпець вектора  $\varphi(\bar{u})$  в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  є добутком матриці оператора  $\varphi$  на координатний стовпець вектора  $\bar{u}$  в тому ж базисі.

### ТЕОРЕМА 6.7.

Ранг лінійного оператора  $\varphi$ , який діє в просторі  $U$ , дорівнює рангу матриці цього оператора в довільному базисі простору  $U$ .

#### Доведення:

Нехай  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  - деякий базис простору  $U$ ,  $A$  - матриця оператора  $\varphi$  в цьому базисі. Очевидно  $\{\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n)\}$  - система твірних простору  $\text{Im } \varphi$ . Тому ранг оператора  $\varphi$  дорівнює рангу системи векторів  $\{\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n)\}$ . Нехай  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(\bar{e}_i) = \bar{0}$ ; тоді

$$(\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n)) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{або } (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Так як  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  - базис простору  $U$ , то

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Якщо  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  - система векторів-стовпців матриці

$A$ , то з отриманої рівності випливає, що  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{a}_i = \bar{0}$ . Очевидно,

що з другого співвідношення випливає перше. За лемою 3.4 ранги систем  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  і  $\{\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n)\}$  рівні.

Теорема доведена.

## ТЕОРЕМА 6.8.

Нехай  $U$  - векторний простір над полем  $F$ ,  $\varphi$  - лінійний оператор, який діє в просторі  $U$ . Наступні твердження еквівалентні:

1. Відображення  $\varphi$  - ін'єктивне;
2. Дефект оператора  $\varphi$  дорівнює нулю;
3. Ранг оператора  $\varphi$  дорівнює розмірності простору  $U$ ;
4. Відображення  $\varphi$  сюр'єктивне.

### Доведення:

Якщо  $\varphi$  - ін'єктивне відображення, то ядро  $\varphi$  складається з одного нульового вектора. Тому дефект оператора  $\varphi$  дорівнює нулю. Отже, умова 1 тягне за собою умову 2. Якщо виконана умова 2, то в силу теореми 6.4 ранг оператора  $\varphi$  дорівнює розмірності простору  $U$ , тобто з 2 випливає 3. Якщо виконана умова 3, то  $\text{Im } \varphi \subset U$ , причому

розмірності просторів рівні. Тому  $\text{Im } \varphi = U$ , і відображення  $\varphi$  - сюр'єктивне. Отже з 3 випливає 4. Нарешті, якщо 4 сюр'єктивне, то ранг оператора  $\varphi$  дорівнює розмірності простору  $U$ , а значить дефект  $\varphi$  дорівнює 0 і відображення  $\varphi$  ін'єктивне. Отже, з умови 4 випливає умова 1. Теорема доведена.

З'ясуємо, нарешті, ще одне питання. Нехай  $A$  - матриця лінійного оператора  $\varphi$  в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ ,  $B$  - матриця цього ж оператора в базисі  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ . Як зв'язані між собою матриці  $A$  і  $B$ ?

Нехай  $\bar{f}_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} \bar{e}_j$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . Якщо  $T=(\lambda_{ij})$ , то

$(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)T$ . Крім того,  $\varphi(\bar{f}_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} \varphi(\bar{e}_j)$ ,

а, значить,  $(\varphi(\bar{f}_1), \varphi(\bar{f}_2), \dots, \varphi(\bar{f}_n)) = (\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n))T$ .

Так як  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  - лінійно незалежна система векторів, то  $T$  - невинроджена матриця, а, значить, має обернену матрицю. Тому  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)T^{-1}$ . Отже,

$$(\varphi(\bar{f}_1), \varphi(\bar{f}_2), \dots, \varphi(\bar{f}_n)) = (\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n))T = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)AT = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)T^{-1}AT = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)B.$$

Звідси  $(\bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{0}) = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)(T^{-1}AT - B)$ . Так як  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  - базис простору  $U$ , то  $T^{-1}AT = B$ . Матрицю  $T$  називають матрицею переходу від базису  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  до базису  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ . Матриця  $T^{-1}$  називається матрицею переходу від  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  до  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ .

## ВИСНОВОК:

Матриця лінійного оператора  $\varphi$  в базисі  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  дорівнює добутку матриці переходу від базису

$\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  до базису  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  на матрицю оператора  $\varphi$  в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  і на матрицю переходу від  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  до  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ .

## ОЗНАЧЕННЯ 6.8.

Нехай  $U$  - векторний простір над полем  $F$ ,  $\varphi$  - лінійний оператор, що діє в цьому просторі. Підпростір  $W \subset U$  називається  $\varphi$ -інваріантним, якщо  $\varphi(\bar{u}) \in W$ , для будь-якого  $\bar{u} \in W$ .

## ЛЕМА 6.1.

Якщо  $W$  -  $\varphi$ -інваріантний підпростір простору  $U$  і  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  - базис простору  $U$ , що  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  - базис підпростору  $W$ , то матриця лінійного оператора  $\varphi$  у вказаному базисі простору  $U$  має клітинний вигляд:  $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ , де  $A$  - матриця обмеження оператора  $\varphi$  на  $W$  у базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ .

Лема очевидна.

## ЛЕМА 6.2.

Матриця  $A$  має клітинний вигляд:  $\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$ .

## Глава 7. Системи лінійних рівнянь

*В цій главі ми повернемося до розгляду систем лінійних рівнянь та структури їх розв'язків в системі понять векторних просторів.*

Система лінійних рівнянь (1.1) бможе бути записана в матричній формі:

$$A \cdot X = B \quad (7.1)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Напам'ятаємо, що матриця  $A$  називається основною матрицею системи,  $X$  називається стовпцем невідомих, а  $B$  - стовпцем вільних членів.

Розширена матриця  $U$  має вигляд

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

В термінах теорії матриць сформулюємо критерій сумісності систем лінійних рівнянь.

### ТЕОРЕМА 7.1 (Кронекера-Капеллі).

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці цієї системи дорівнював рангу її розширеної матриці.



## Доведення:

### Необхідність.

Нехай система лінійних рівнянь (1.1) сумісна. Якщо  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  її розв'язок, то  $\sum_{k=1}^n a_{ik} \gamma_k = b_i$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ . В матричній формі це можна записати у вигляді:

$$AG=B, \text{ де } G=\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix}$$

Отримане співвідношення означає, що стовпець вільних членів  $B$  лінійно виражається через стовпці матриці  $A$ . Оскільки всі стовпці матриці  $A$  є стовпцями матриці  $U$ , то системи векторів-стовпців матриці  $A$  і  $U$  еквівалентні. Отже, ранг основної матриці  $A$  дорівнює рангу розширеної матриці  $U$ .

### Достатність.

Припустимо, що ранги матриць  $A$  і  $U$  рівні. Це означає, що максимальна лінійно незалежна система векторів-стовпців матриці  $A$  є такою ж і для матриці  $U$ . Тому стовпець вільних членів  $B$  є лінійною комбінацією стовпців матриці  $A$ . Отже,

$$\text{існують такі числа } \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \text{ що } A \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix} = B$$

Таким чином, вектор  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in F^n$  є розв'язком системи лінійних рівнянь (1.1). отже, вказана система сумісна.

Теорема доведена.

Перш, ніж приступити до вивчення системи лінійних рівнянь (1.1), розглянемо спочатку її частинний випадок, коли

$m=n$ , і матриця  $A$  невинроджена. З невинродженості матриці  $A$  впливає, що її ранг дорівнює  $n$ , тому ранг розширеної матриці  $U$  також дорівнює  $n$ , і дана система сумісна, в силу теореми Кронекера-Капеллі. Помножимо рівність (7.1) зліва на матрицю  $A^{-1}$ :  $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ , або  $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$ ; тобто  $X = A^{-1}B$ . з цієї рівності впливає, що система лінійних рівностей має єдиний розв'язок. За теоремою 5.13,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1T} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2T} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{T1} & A_{T2} & \dots & A_{TT} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} C_A, \text{ де } C_A = (A_{ij}).$$

$$\text{тому } X = - \frac{1}{|A|} C_A B = \frac{|B_i|}{|A|}, \quad i=1, 2, \dots, n, \text{ де } B_i - \text{матриця,}$$

отримана з  $A$  заміною стовпця коефіцієнтів при змінній  $i$  на стовпець вільних членів  $B$ . Отже, якщо в системі (1.1)  $m=n$ , і основна матриця невинроджена, то система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок, який записується у вигляді формул

$$x_i = \frac{|B_i|}{|A|}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (7.2).$$

Формули (7.3) називаються формулами Крамера.

Ці формули незручні для практичного розв'язку системи лінійних рівнянь, але вони мають теоретичний інтерес. На практиці для знаходження розв'язку систем лінійних рівнянь використовується метод виключення змінних, викладений в главі 1. Цей метод називають методом Гауса. Розглянемо систему, отриману з (1.1) виключенням змінної  $x_1$ :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots \\ a'_{n2}x_2 + \dots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases} \quad (7.3)$$

В матричному вигляді виключення змінної  $x_1$  з 2-го рівняння можна реалізувати множенням рівності (7.1) зліва на

елементарну матрицю  $F_{21}(-a_{11}^{-1}a_{21})$ . Якщо  $a_{11} = 0$ , то можна переставити рівняння, взявши за першу рівність ту, в якій коефіцієнт при  $x_1$  не дорівнює нулю.

Таким чином, за допомогою метода Гауса розв'язок системи лінійних рівнянь від  $n$  змінних зводиться до розв'язку тієї ж системи від  $(n-1)$  змінної.

Перейдемо до загального випадку системи лінійних рівнянь (1.1), тобто до випадку, коли  $m$  і  $n$  - довільні.

## ТЕОРЕМА 7.2.

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь від  $n$  змінних є підпростором лінійного простору  $F$ .

### Доведення:

Нехай  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ,  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  - два розв'язки системи лінійних однорідних рівнянь з основною матрицею  $A = (a_{ij})$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ . За означенням розв'язку маємо:

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ і } A \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \lambda_2 + \mu_2 \\ \dots \\ \lambda_k + \mu_k \end{bmatrix} = A \left[ \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_k \end{bmatrix} \right] = A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, сума двох розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь знову буде розв'язком цієї системи. Аналогічно доводиться, що добуток вектора-розв'язку  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  на скаляр  $\gamma \in F$  також буде розв'язком даної однорідної системи

лінійних рівнянь. В силу теореми 3.2 множина всіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь від  $n$  змінних є підпростором простору  $F$ .

Теорема доведена.

## ТЕОРЕМА 7.3.

Розмірність простору розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь дорівнює  $n-r$ , де  $n$  - число змінних, а  $r$  - ранг основної матриці системи.

### Доведення:

Нехай  $A$  - основна матриця системи однорідних лінійних рівнянь,  $r$  - її ранг. Якщо  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  - розв'язок системи (1.1) то має місце рівність:

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Нехай  $\{\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \bar{e}_n = (0, 0, \dots, 1)\}$

- базис векторного простору  $F^n$  і  $\varphi$  - лінійний оператор, що діє в цьому просторі, причому матриця оператора  $\varphi$  у вказаному базисі дорівнює  $A$ . Із співвідношення (7.4) випливає, що кожен розв'язок системи лінійних рівнянь (1.1) належить ядру оператора  $\varphi$ . За теоремою 6.7 ранг лінійного оператора  $\varphi$  дорівнює рангу матриці  $A$ , тобто дорівнює  $r$ . З іншої сторони, за теоремою 6.4, дефект оператора  $\varphi$  дорівнює  $n-r$ . Твердження даної теореми випливає з того, що дефект оператора  $\varphi$  дорівнює розмірності простору розв'язків системи (1.1).

## ОЗНАЧЕННЯ 7.1

Фундаментальною системою розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь називається базис простору розв'язків цієї системи.

З попередньої теореми випливає, що фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь містить  $n - r$  розв'язків, де  $n$  - число змінних, а  $r$  - ранг основної матриці системи.

*Завдання фундаментальної системи розв'язків визначає весь простір розв'язків. Тому задача знаходження множини всіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь зводиться до знаходження фундаментальної системи розв'язків.*

Опишемо коротко процес знаходження фундаментальної системи розв'язків однорідної системи  $AX=0$ , в якій ранг  $A$  дорівнює  $r$ .

- 1) Приводимо матрицю  $A$  до ступінчатого вигляду за допомогою послідовності елементарних перетворень (тобто, мовою матриць, множенням її зліва на матрицю  $U$ , яка має обернену матрицю):  $UAX=U0$ ;  $(UA)X=0$ .
- 2) Матриця  $UA$  містить  $r$  нульових рядків. Отже, система  $(UA)X=0$  фактично містить  $r$  нетривіальних рівнянь. Крім того, вона рівносильна даній системі  $AX=0$ .
- 3) Матриця  $UA$  містить мінор  $r$ -го порядку, відмінний від нуля. Залишимо в лівих частинах рівнянь системи  $(UA)X=0$  тільки ті змінні, коефіцієнти при яких входять у вибраний мінор  $r$ -го порядку, який не дорівнює нулю. Інші  $(n-r)$  змінних перенесемо у праві частини рівнянь, назвемо ці змінні вільними.
- 4) В отриманій системі будемо давати  $(n-r)$  вільним змінним довільні значення. Так як матриця, що складається з коефіцієнтів при  $r$  змінних в лівій частині, є квадратною і не виродженою, то для будь-яких значень вільних змінних перетворена система має єдиний розв'язок.
- 5) Фундаментальну систему розв'язків будемо наступним чином: надаючи першій з вільних змінних значення 1, а іншим - нульові значення, отримаємо перший фундаментальний розв'язок; потім розв'язок 1 надаємо другій вільній змінній, а іншим нульові значення; це буде другий фундаментальний розв'язок і т.д. Так як вільних змінних  $(n-r)$  штук, то описаним способом отримаємо  $(n-r)$  розв'язків. Лінійна залежність отриманої системи розв'язків легко можна встановити.

Нехай тепер задана неоднорідна система лінійних рівнянь  $AX=B$  (1). Системі (7.1) поставимо у відповідність однорідну систему лінійних рівнянь

$$AX=0 \quad (7.5).$$

Нагадаємо тепер теореми 1.9, 1.10

З них теорем випливає, що будь-який розв'язок системи лінійних рівнянь (1.1) може бути отриманий як сума деякого фіксованого розв'язку цієї системи і довільного розв'язку відповідної однорідної системи (7.5). Таким чином, множина розв'язків неоднорідної системи (7.1) є лінійним многовидом.

## Глава 8. Власні вектори лінійного оператора

В главі 6 "Лінійні оператори" був встановлений зв'язок між матрицями одного і того ж лінійного оператора, який діє в просторі  $U$  над полем  $F$ , в різних базисах. В зв'язку з цим виникає задача знаходження базису векторного простору  $U$ , в якому матриця лінійного оператора  $\varphi$  мала б найбільш простий вид. В розв'язку поставленої задачі грає велику роль поняття власного вектора.

### ОЗНАЧЕННЯ 8.1.

Скаляр  $\lambda \in F$  називається власним значенням лінійного оператора  $\varphi$ , який діє у векторному просторі  $U$  над полем  $F$ , якщо в просторі  $U$  існує такий ненульовий вектор  $\bar{u}$ , що  $\varphi(\bar{u}) = \lambda \bar{u}$ . В цьому випадку вектор  $\bar{u}$  називається власним вектором лінійного оператора  $\varphi$ , який належить власному значенню  $\lambda$ .

Відзначимо, що власні вектори лінійного оператора  $\varphi$  - це ненульові вектори.

Для знаходження власних векторів лінійного оператора  $\varphi$  задамо на просторі  $U$  будь-який базис  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Нехай  $\bar{u} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  - власний вектор оператора  $\varphi$ , який належить власному значенню  $\lambda$ ;  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  - координати вектора  $\bar{u}$  у вибраному базисі. Тоді  $\varphi(\bar{u}) = \lambda \bar{u} = (\lambda\gamma_1, \lambda\gamma_2, \dots, \lambda\gamma_n)$ . Якщо  $A$  - матриця лінійного оператора  $\varphi$  у вказаному базисі, то

$$\begin{bmatrix} \lambda\gamma_1 \\ \lambda\gamma_2 \\ \dots \\ \lambda\gamma_k \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix}, \text{ або } \lambda E \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix},$$

$$(\lambda E - A) \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Оскільки вектор  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = \bar{u} \neq \bar{0}$ , то ранг матриці  $(\lambda E - A)$  менше ніж  $n$ . Отже, визначник квадратної матриці  $(\lambda E - A)$  дорівнює нулю. Нехай  $x$  - змінна. Розглянемо матрицю  $(xE - A)$ .

Неважко установити, що визначником  $|xE - A|$  матриці  $(xE - A)$  є многочлен степеня  $n$  від змінної  $x$ ;  $f(x) = |xE - A|$ . Отже власне значення  $\lambda$  оператора  $\varphi$  є коренем рівняння  $f(x) = 0$ .

Якщо  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  - деякий інший базис простору  $U$  і  $T$  - матриця переходу від базису  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  до базису  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ , то матриця лінійного оператора  $\varphi$  в базисі  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  дорівнює  $T^{-1}AT$ . Тому

$$xE - T^{-1}AT = T^{-1}(xE)T - T^{-1}AT = T^{-1}(xE - A)T,$$

так як скалярна матриця  $xE$  перестановочна з будь-якою матрицею; отже,

$$|xE - T^{-1}AT| = |T^{-1}(xE - A)T| = |T^{-1}| |xE - A| |T| = |xE - A| = f(x).$$

Тут ми скористались правилом обчислення визначника добутку матриць. Отже, ми довели, що многочлен  $f(x) = |xE - A|$ , де  $A$  - матриця оператора  $\varphi$  в заданому базисі, не залежить від вибору базису.

## ОЗНАЧЕННЯ 8.2.

Нехай  $\varphi$  - лінійний оператор, що діє в просторі  $U$  над полем  $F$  і  $A$  - матриця цього оператора в довільно вибраному базисі. Многочлен  $f(x) = |xE - A|$  називається характеристичним многочленом лінійного оператора  $\varphi$ , а рівняння  $f(x) = 0$  називається характеристичним рівнянням цього оператора.



З наведених вище міркувань випливає, що власні значення лінійного оператора  $\varphi$  є коренями його характеристичного рівняння. З цієї причини їх називають ще характеристичними числами лінійного оператора  $\varphi$ .

### Алгоритм обчислення власних векторів

Отже, для відшукування координат власних векторів лінійного оператора  $\varphi$  в базисі  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  простору  $U$  потрібно:

1. Скласти характеристичне рівняння  $f(x)=0$  лінійного оператора  $\varphi$ ;
2. Знайти корні характеристичного рівняння, яке належить полю  $F$ ; це будуть власні значення лінійного оператора  $\varphi$ ;
3. Для кожного власного значення  $\lambda_0$  оператора  $\varphi$  знаходимо координати власних векторів цього оператора, які належать власному значенню  $\lambda_0$ ; для цього потрібно розв'язати систему рівнянь (8.1)

$$(\lambda_0 E - A) \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

де  $A$  - матриця лінійного оператора  $\varphi$  у вибраному базисі,  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  - координатний рядок власного вектора в цьому базисі. Так як ранг матриці  $\lambda_0 E - A$  менше ніж  $n$ , то система (8.1) має ненульовий розв'язок. Фактично достатньо знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь (8.1).

## Глава 9. Жорданова форма матриці

Приступимо тепер до побудови найбільш простої форми матриці лінійного оператора  $\varphi$ , який діє у векторному просторі  $U$  над полем  $F$ . Припустимо, що всі корні характеристичного рівняння лінійного оператора  $\varphi$  належать полю  $F$ .

**ТЕОРЕМА 9.1 (Гамільтона-Келі).**

Якщо  $f(x)$  - характеристичний многочлен лінійного оператора  $\varphi$ , то  $f(\varphi)=0$ .

**Зауваження 1.**

В главі "Лінійні оператори" були визначені сума, різниця, добуток лінійних операторів (а значить і натуральні степені даного лінійного оператора) і добуток лінійного оператора на скаляр. Тому значення многочлена від лінійного оператора визначене. Крім того, з властивості асоціативності множення відображень випливає, що  $\varphi^k \varphi^m = \varphi^m \varphi^k = \varphi^{m+k}$ . Тому для будь-яких многочленів  $f(x)$  і  $g(x)$  над полем  $F$ ,  $f(x)g(x) = g(x)f(x)$ .

**Доведення:**

Будемо доводити теорему індукцією по розмірності простору  $U$ . Якщо розмірність  $U$  дорівнює 1, то базис простору  $U$  складається з одного вектора  $\bar{a}$ . Тому характеристичний многочлен  $f(\varphi)$  оператора  $\varphi$  в цьому випадку дорівнює  $x - \lambda$ ;  $f(x) = x - \lambda$ . Отже,  $f(\varphi) = \varphi - \lambda$ ;  $f(\varphi)(\bar{a}) = (\varphi - \lambda)(\bar{a}) = \varphi(\bar{a}) - \lambda \bar{a} = \lambda \bar{a} - \lambda \bar{a} = \bar{0}$ . Так як лінійний оператор  $f(\varphi)$  переводить в нульовий вектор базисний вектор  $\bar{a}$ , то  $f(\varphi)=0$ . Для  $n=1$  теорема справедлива.

Припустимо, що теорема справедлива для оператора, який діє в просторі розмірності  $n$ . Нехай тепер лінійний оператор  $\varphi$  діє в просторі  $U$ , розмірність якого  $(n+1)$  над полем  $F$ .

Нехай  $\lambda_0$  - будь-який корінь характеристичного многочлена оператора  $\varphi$ . За умовою  $\lambda_0 \in F$ . Як видно з попередньо-

го розділу, в  $U$  існує власний вектор  $\bar{a}$ , що належить власному значенню  $\lambda_0$ ;  $\varphi(\bar{a}) = \lambda_0 \bar{a}$ . Нехай  $f(x)$  - характеристичний многочлен лінійного оператора  $\varphi$ . Тоді  $f(x) = (x - \lambda_0)g(x)$ , де  $g(x)$  - многочлен степені  $n$ . Припустимо, що  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n, \bar{a}\}$  - базис простору  $U$ , що містить в собі власний вектор  $\bar{a}$ . В силу леми 6.1, матриця оператора  $\varphi$  має в цьому базисі вид:

$$A = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & B & \dots \\ & & 0 \\ \mu_1 & \dots & \mu_n & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

Тоді

$$f(x) = |xE - A| = \begin{vmatrix} & & 0 \\ & xE - B & \dots \\ & & 0 \\ -\mu_1 & \dots & -\mu_n & \lambda_0 \end{vmatrix} = (x - \lambda_0)|xE - B|$$

згідно властивості визначників. З іншої сторони,  $f(x) = (x - \lambda_0)g(x)$ ; тому  $g(x) = |xE - B|$ . Нехай  $V = L(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , позначимо через  $\varphi_1$  лінійний оператор, який діє в просторі  $V$ , і в базисі  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  має матрицю  $B$ . За припущенням індукції,  $g(\varphi_1) = 0$ , так як  $g(x) = |xE - B|$  - характеристичний многочлен оператора  $\varphi_1$ . В силу теореми 8.5 матриця оператора  $g(\varphi_1)$  в базисі  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  дорівнює  $g(B) = 0$ . Звідси і з правила дії над клітинними матрицями отримаємо:

$$g(A) = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & g(B) & \dots \\ & & 0 \\ v_1 & \dots & v_n & v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & 0 & \dots \\ & & 0 \\ v_1 & \dots & v_n & v_{n+1} \end{bmatrix}$$

Таким чином,  $g(\varphi)(\bar{e}_i) = v_i \bar{a}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ; тому  
 $f(\varphi)(\bar{e}_i) = (\varphi - \lambda_0)g(\varphi)(\bar{e}_i) = (\varphi - \lambda_0)(v_i \bar{a}) = v_i(\varphi(\bar{a}) - \lambda_0(\bar{a})) =$   
 $v_i(\lambda_0 \bar{a} - \lambda_0 \bar{a}) = \bar{0}$ .

Крім того, очевидно  $f(\varphi)(\bar{a}) = g(\varphi)(\varphi - \lambda_0)(\bar{a}) = \bar{0}$ .  
 Отже,  $f(\varphi)$  всі базисні вектори простору  $U$  відображає в нульовий вектор, тобто  $f(\varphi) = 0$ . Допущення індукції виправдане.

Теорема доведена.

Так як всі корні характеристичного многочлена лінійного оператора  $\varphi$  належать полю  $F$ , то

$$f(x) = (x - \lambda_1)^{s_1} (x - \lambda_2)^{s_2} \dots (x - \lambda_k)^{s_k}, \quad \sum_{i=1}^k s_i = n.$$

## Зауваження 2.

Теорема Гамільтона-Келі справедлива і в тому випадку, коли не всі корні характеристичного многочлена оператора  $\varphi$  належать полю  $F$ . Наведене нижче доведення для цього випадку повинно бути модифіковане наступним чином: поле  $F$  треба розширити до поля  $K$ , приєднавши до нього всі власні значення лінійного оператора  $\varphi$ , вважати, що оператор  $\varphi$  діє на векторному просторі  $W$  над полем  $K$ , базис якого співпадає з базисом даного векторного простору  $V$ , скориставшись тим, що  $f(\varphi)$  як оператор, що діє на просторі  $W$ , дорівнює 0, а значить,  $f(\varphi) = 0$  в просторі  $V$ , елементи якого утворюють підмножину множини  $W$ .

## ОЗНАЧЕННЯ 9.1.

Нехай  $\lambda_0$  - корінь характеристичного многочлена  $f(x)$  лінійного оператора  $\varphi$ ,  $\lambda_0 \in F$ . Кореневим підпростором лінійного оператора  $\varphi$ , що відповідає кореню  $\lambda_0$ , називається

множина  $V$  всіх векторів  $\bar{a} \in U$  таких, що  $(\varphi - \lambda_0)^k(\bar{a}) = \bar{0}$  для деякого натурального числа  $k$ .

Множина  $V$  є підпростором векторного простору  $U$ , що неважко довести за допомогою теореми 3.2, це оправдовує термін кореневий підпростір.

**ЛЕМА 9.1.**

Якщо  $\varphi$  - лінійний оператор, що діє в просторі  $U$  і  $h(x)$  - довільний многочлен, то  $\text{Im}(h(\varphi))$  є  $\varphi$ -інваріантним підпростором простору  $U$ .

*Доведення:*

Нехай  $\bar{u} \in \text{Im}(h(\varphi))$ ; тоді  $\bar{u} = h(\varphi)(\bar{v})$ ,  $\bar{v} \in U$ . Тому  $\varphi(\bar{u}) = \varphi(h(\varphi)(\bar{v})) = h(\varphi) \circ \varphi(\bar{v}) \in \text{Im } \varphi$ , що і потрібно було довести.

**ЛЕМА 9.2.**

Кореневі підпростори лінійного оператора  $\varphi$  є  $\varphi$ -інваріантними підпросторами.

*Доведення:*

Нехай  $V$  - кореневий підпростір лінійного оператора  $\varphi$ , відповідного кореню  $\lambda_0$  характеристичного многочлена  $f(x)$  оператора  $\varphi$ . Якщо  $\bar{u} \in V$  то

$$(\varphi - \lambda_0 E)^m(\varphi(\bar{u})) = \varphi((\varphi - \lambda_0 E)^m(\bar{u})) = \bar{0},$$

тобто  $\varphi(\bar{u}) \in V$ , що і потрібно було довести.

Нехай  $V_i$  - кореневий підпростір лінійного оператора  $\varphi$ , що відповідає власному значенню  $\lambda_i$ .

**ТЕОРЕМА 9.2.**

Векторний простір  $U$  над полем  $F$ , в якому діє лінійний оператор  $\varphi$ , розкладається на пряму суму корневих підпросторів оператора  $\varphi$ .

*Доведення:*

Нехай  $f(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{S_i}$  - характеристичний многочлен

лінійного оператора  $\varphi$ . Будемо доводити теорему індукцією по числу  $k$  різних коренів многочлена  $f(x)$ . Якщо  $k=1$ , то в силу теореми Гамільтона-Келі, весь простір  $U$  є кореневим підпростором, відповідним єдиному кореню  $f(x)$ . Тому  $U$  є прямою сумою одного доданку. Припустимо, що теорема справедлива для значення  $k \geq 1$ .

Доведемо її справедливність для випадку, коли число власних значень дорівнює  $k+1$ . Нехай

$$f(x) = (x - \lambda_1)^{S_1} (x - \lambda_2)^{S_2} \dots (x - \lambda_k)^{S_k} (x - \lambda_{k+1})^{S_{k+1}};$$

позначимо через  $g(x)$  многочлен  $(x - \lambda_1)^{S_1} (x - \lambda_2)^{S_2} \dots (x - \lambda_k)^{S_k}$ ,

а через  $h(x)$  - многочлен  $(x - \lambda_{k+1})^{S_{k+1}}$ . Тоді  $f(x) = g(x)h(x)$ ; в силу теореми Гамільтона-Келі  $f(\varphi) = 0$ , тобто

$$g(\varphi)h(\varphi) = 0 \quad (9.1)$$

З іншої сторони  $g(x)$  і  $h(x)$  - взаємно прості многочлени.

Тому існують многочлени  $p(x)$  і  $r(x)$  такі, що  $p(x)g(x) + h(x)r(x) \equiv 1$ .

Підставляючи в цю тотожність оператор  $\varphi$  замість  $x$  отримаємо:

$$p(\varphi)g(\varphi) + h(\varphi)r(\varphi) \equiv e \quad (9.2),$$

де  $e$  - тотожний оператор, що діє в просторі  $U$ . Нехай

$$V = \{g(\varphi)(\bar{u}) \mid \bar{u} \in U\}, \quad W = \{h(\varphi)(\bar{u}) \mid \bar{u} \in U\}$$

Так як  $V$  і  $W$  образи лінійних операторів  $h(x)$  і  $g(x)$ , то за теоремою 6.2,  $V$  і  $W$  - підпростори  $U$ . Доведемо, що  $V \cup W = \{0\}$  (див. (9.1)).

Дійсно,  $\bar{x} = e \bar{x} = p(\varphi)g(\varphi)\bar{x} + h(\varphi)r(\varphi)\bar{x} = p(\varphi)(\bar{0}) + r(\varphi)(\bar{0}) = \bar{0}$ .

Отже,  $\bar{x} = \bar{0}$  і  $U \cap W = \{0\}$ . Крім того,

$$\bar{x} = e \bar{x} = p(\varphi)(g(\varphi)\bar{x}) + r(\varphi)(h(\varphi)\bar{x}) = p(\varphi)\bar{v} + r(\varphi)\bar{w}, \quad \bar{v} \in V,$$

$$\bar{w} \in W. \text{ В силу леми 7.1, } p(\varphi)\bar{v} = \bar{v}_1 \in V, \quad r(\varphi)\bar{w} = \bar{w}_1 \in W.$$

Отже,  $\bar{x} \in V + W$  а так як  $U \cap W = \{0\}$ , то  $U = V \oplus W$ . Якщо  $\bar{v} \in V$ , то  $\bar{v} = g(\varphi)(u)$ ,  $u \in U$  і в силу (9.1),  $h(\varphi)g(\varphi)(u) = h(\varphi)(\bar{v}) = \bar{0}$ . З іншої сторони, якщо  $h(\varphi)(\bar{x}) = \bar{0}$ , то з співвідношення  $\bar{x} = p(\varphi)g(\varphi)(\bar{x}) + r(\varphi)h(\varphi)(\bar{x})$  отримаємо:  $\bar{x} = g(\varphi)(p(\varphi)\bar{x}) \in V$ .

Отже,  $V$  - кореневий підпростір оператора  $\varphi$ , відповідне кореню  $\lambda_{k+1}$ . З іншої сторони,  $W$  -  $\varphi$ -інваріантний підпростір. Як і в доведенні теореми Гамільтона-Келі, можна показати, що  $g(\varphi)$  - характеристичний многочлен обмеження оператора  $\varphi$  на  $W$ .

За припущенням індукції  $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ , де  $W_i$  - кореневий підпростір оператора  $\varphi$ , відповідний кореню  $\lambda_i$ ;  $i=1, 2, \dots, k$ . Тому  $U = V \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ , що і потрібно було довести.

Якщо за базис простору  $U$  взяти об'єднання базисів корневих підпросторів оператора  $\varphi$  у вказаному базисі буде мати клітинний вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix}$$

де  $A_i$  - матриця обмеження оператора  $\varphi$  на кореновому підпросторі, відповідному кореню  $\lambda_i$ ;  $i=1, 2, \dots, k$ . Тому задача знаходження базису, в якому матриця лінійного оператора  $\varphi$  мала б простіший вигляд, зводиться до аналогічної задачі для корневих підпросторів.

Отже, нехай  $U$  - простір  $\varphi$  - лінійний оператор, який діє в просторі  $U$ , причому характеристичний многочлен  $f(x) = (x - \lambda)^n$ .

Розглянемо спочатку випадок, коли в просторі  $U$  існує такий вектор  $\bar{u}$ , що  $(\varphi - \lambda e)^{n-1}(\bar{u}) \neq \bar{0}$ . Нехай  $\bar{u}_0 = \bar{u}$ ,  $\bar{u}_i = (\varphi - \lambda e)^i(\bar{u}_0)$ ,  $i=1, 2, \dots, n-1$ . Покажемо, що

$\{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}\}$  - базис простору  $U$ . Для цього достатньо встановити лінійну незалежність вказаної системи векторів.

Нехай  $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \bar{u}_i = \bar{0}$ . В силу теореми Гамільтона-Келі  $(\varphi - \lambda e)^n (\bar{u}_0) = \bar{0}$ .

Тому при  $i > 0$   $(\varphi - \lambda e)^{n-1} (\bar{u}_i) = (\varphi - \lambda e)^{n+i-1} (\bar{u}_0) = \bar{0}$ . З іншої сторони  $(\varphi - \lambda e)^{n-1} (\bar{u}_0) = \bar{u}_{n-1} \neq \bar{0}$  за умовою. Звідси  $(\varphi - \lambda e)^{n-1} (\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{iu} \bar{u}_i) = \alpha_0 \bar{u}_{n-1} = \bar{0}$ ; тому  $\alpha_0 = 0$ . Отже,

$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{iu} \bar{u}_i = \bar{0}$ ; застосовуючи до цього співвідношення оператор

$(\varphi - \lambda e)^{n-2}$ , отримуємо, що  $\alpha_1 = 0$ . Повторюючи вказаний процес, матимемо:  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1} = 0$ . Отже,  $\{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}\}$  - базис простору  $U$ . В цьому базисі матриця оператора  $\varphi$  має вид:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Матриця вказаного виду називається *жордановою кліткою*. Доведемо тепер, що якщо  $U$  - кореневий підпростір оператора  $\varphi$ , то в загальному випадку матриця  $\varphi$  в деякому базисі має вид:



$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{bmatrix}$$

де  $B_i$  - жорданова клітка  $i=1, 2, \dots, k$ . Вказана матриця називається *жордановою*.

Отже, нехай  $(\varphi - \lambda e)^s = 0$ ,  $(\varphi - \lambda e)^{s-1} \neq 0$ ;  $s < n$  (випадок  $s=n$  розібраний вище). Якщо  $\bar{u}_0 \in U$  такий вектор, що  $(\varphi - \lambda e)^{s-1}(\bar{u}_0) \neq 0$ , то нехай  $\bar{u}_i = (\varphi - \lambda e)^i(\bar{u}_0)$ ,  $i=1,2,\dots,s-1$ . Вище було встановлено, що система векторів  $\{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{s-1}\}$  - лінійно незалежна. Нехай  $V = L\{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{s-1}\}$ . Очевидно  $V$  -  $\varphi$ -інваріантний підпростір простору  $U$ . Нехай  $W$  -  $\varphi$ -інваріантний підпростір в  $U$  максимальної розмірності, що задовільняє умові  $V \cap W = \{\bar{0}\}$ . Покажемо, що  $U = V \oplus W$ . Для цього достатньо встановити, що  $U=V+W$ . Якщо це не так, то в  $U$  існує такий вектор  $\bar{x}$ , що  $\bar{x} \notin V + W$ , але  $(\varphi - \lambda e)(\bar{x}) \in V + W$ . Оскільки  $(\varphi - \lambda e)(\bar{x}) \in V + W$ , то  $(\varphi - \lambda e)(\bar{x}) = \bar{v} + \bar{l}$ ,  $\bar{v} \in V$ ,  $\bar{l} \in W$ . Маємо

$$\begin{aligned} (\varphi - \lambda e)^{s-1}((\varphi - \lambda e)(\bar{x})) &= (\varphi - \lambda e)^s(\bar{x}) = \bar{0}, \\ (\varphi - \lambda e)^{s-1}(\bar{v} + \bar{l}) &= (\varphi - \lambda e)^{s-1}(\bar{l}) + (\varphi - \lambda e)^{s-1}(\bar{v}) = \bar{0}. \end{aligned}$$

Оскільки  $V$  і  $W$  -  $\varphi$ -інваріантні підпростори і  $V \cap W = \{\bar{0}\}$ , то

$$(\varphi - \lambda e)^{s-1}(\bar{v}) = \bar{0}, \text{ тому } \bar{v} = \sum_{i=1}^{s-1} \gamma_i \bar{u}_i; \text{ таким чином}$$

$$\bar{v} = (\varphi - \lambda e) \left( \sum_{i=1}^{s-1} \gamma_i \bar{u}_{i-1} \right) = (\varphi - \lambda e)(\bar{v}_1), \text{ де } \bar{v}_1 = \sum_{i=1}^{s-1} \gamma_i \bar{u}_{i-1} \in V.$$

Тому  $(\varphi - \lambda e)(\bar{x}) = (\varphi - \lambda e)(\bar{v}_1) + \bar{l}$ , або  $(\varphi - \lambda e)(\bar{x} - \bar{v}_1) \in W$ , але  $(\bar{x} - \bar{v}_1) \in V + W$ .

Розглянемо підпростір  $T=L(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k, \bar{x}-\bar{v}_1)$ , де  $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k\}$  - базис підпростору  $W$ . Очевидно  $T \supset W$ , але  $T \neq W$ , так як  $(\bar{x}-\bar{v}_1) \notin W$ . З іншої сторони  $(\varphi - \lambda e)(\bar{x}-\bar{v}_1) \in W$ , тобто  $\varphi(\bar{x}-\bar{v}_1) - \lambda_1(\bar{x}-\bar{v}_1) \in W \subset T$ , або  $\varphi(\bar{x}-\bar{v}_1) \in T$ .

Крім того,  $\varphi(\bar{f}_i) \in W \subset T$ ,  $i=1, 2, \dots, k$  в силу  $\varphi$ -інваріантності підпростору  $W$ . Отже  $T$  - також  $\varphi$ -інваріантний підпростір, і  $T \cap V = \{\bar{0}\}$ .

$$\text{Дійсно, якщо } \bar{g} \in T \cap V, \text{ то } \bar{g} = \alpha(\bar{x}-\bar{v}_1) + \sum_{i=1}^k \beta_i \bar{u}_i.$$

Коефіцієнт  $\alpha \neq 0$ , інакше  $(\bar{x}-\bar{v}_1) \in V+W$ . Так як  $\alpha = 0$ , то  $\bar{g} \in V \cap W = \{\bar{0}\}$ , тобто  $\bar{g} = \bar{0}$ . Отже,  $T$  -  $\varphi$ -інваріантний підпростір,  $T \cap V = \{\bar{0}\}$  і розмірність  $T$  більше розмірності  $W$ . Це протирічить вибору підпростору  $W$ . Отже,  $U = V \oplus W$ . Так як розмірність  $W$  менше розмірності  $U$ , то за індукцією можна вважати, що в якомусь базисі підпростору  $W$  матриця обмеження оператора  $\varphi$  на  $W$  є жордановою.

В силу  $\varphi$ -інваріантності підпростору  $V$ , матриця оператора  $\varphi$  у відповідному базисі простору  $U$  також буде жордановою. Будемо називати жордановою також матрицю виду:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{bmatrix}$$

де  $A_i$  - жорданова клітина,  $i=1, 2, \dots, m$ ; при цьому власні значення, яким відповідають клітини  $A_i$  можуть бути різними.

Отже має місце теорема.

**ТЕОРЕМА 9.3.**

Нехай  $\varphi$  - лінійний оператор, що діє на просторі  $U$  над полем  $F$ , причому всі корені характеристичного многочлена оператора  $\varphi$  належать  $F$ ; тоді матриця оператора  $\varphi$  у відповідному базисі простору  $U$  є жордановою.

Для практичного знаходження жорданової матриці лінійного оператора  $\varphi$  можна діяти за наступною схемою. Позначимо через  $d_i$  дефект лінійного оператора  $(\varphi - \lambda_0 e)^i$ , де  $\lambda_0$  - дане власне значення оператора  $\varphi$ . Для знаходження дефекту лінійного оператора потрібно з розмірності простору  $U$  відняти ранг оператора, тобто ранг матриці цього оператора в довільному базисі.

Тоді  $d_1$  - загальне число жорданових клітин, які відповідають власному значенню  $\lambda_0$ ;  $(d_2 - d_1)$  - число клітин розмірності більше ніж 1,  $(d_i - d_{i-1})$  - число клітин розмірності більше ніж  $i-1$ . Так як простір  $U$  має скінченну розмірність, то для деякого  $k$ ,  $d_k = d_{k+1}$ . Отже, жорданові клітини, що відповідають власному значенню  $\lambda_0$ , мають максимальну розмірність  $k$ .

Клітин такої розмірності маємо  $(d_k - d_{k-1})$  штук. Клітин розмірності  $(k-1)$  буде  $(d_{k-1} - d_{k-2}) - (d_k - d_{k-1})$  штук і т.д.

Алгоритм побудови жорданової форми матриці лінійного оператора та приклад його застосування наведені в главі 11.

# Глава 10. Євклідові простори

## ОЗНАЧЕННЯ 10.1.

Євклідовим векторним простором називається векторний простір  $V$  над полем дійсних чисел  $R$ , для якого визначене відображення  $\tau : V \times V \rightarrow R$ , яке має наступні властивості:

1.  $\tau(\bar{a}, \bar{a}) \geq 0$ , причому якщо  $\bar{a} \neq 0$ , то  $\tau(\bar{a}, \bar{a}) > 0$ ;
2.  $\tau(\bar{a}, \bar{b}) = \tau(\bar{b}, \bar{a})$ ;
3.  $\tau(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}) = \tau(\bar{a}, \bar{b}) + \tau(\bar{a}, \bar{c})$ ;  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V$
4.  $\tau(\alpha \bar{a}) = \alpha \tau(\bar{a})$ ,  $\alpha \in R$ ,  $\bar{a} \in V$

Число  $\tau(\bar{a}, \bar{b}) \in R$  називається скалярним добутком векторів  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$ . Для зручності  $\tau(\bar{a}, \bar{b})$  будемо позначати через  $\bar{a} \bar{b}$ . З властивостей 3 і 4 скалярного добутку випливає, що  $\bar{a} \bar{0} = 0$  для будь-якого  $\bar{a} \in V$  і  $\bar{a} (\sum_{i=1}^k \beta_i \bar{b}_i) = \sum_{i=1}^k \beta_i (\bar{a} \bar{b}_i)$ .

## ОЗНАЧЕННЯ 10.2.

Вектори  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  євклідового простору  $V$  називаються ортогональними, якщо  $\bar{a} \bar{b} = 0$ ;  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  називаються також взаємно ортогональними.

## ОЗНАЧЕННЯ 10.3.

Система векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  називається ортогональною, якщо будь-які два вектора цієї системи взаємно ортогональні. Ортогональна система векторів, яка є базисом простору  $V$ , називається ортогональним базисом цього простору.

## ТЕОРЕМА 10.1.

Ортогональна система ненульових векторів євклідового простору лінійно незалежна.

*Доведення:*

Нехай  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m\}$  - ортогональна система векторів

євклідового простору  $V$ ,  $\bar{a}_i \neq 0$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ . Нехай  $\sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{a}_i = \bar{0}$ ;

тоді 
$$0 = \bar{a}_j \bar{0} = \bar{a}_j \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{a}_i \right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{a}_j \bar{a}_i = \alpha_j \bar{a}_j \bar{a}_j,$$

$j=1, 2, \dots, m$ . Звідси  $\alpha_j = 0$ , тому що  $\bar{a}_j \bar{a}_j > 0$ . Тобто

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ . Система векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m\}$

лінійно незалежна.

Теорема доведена.

#### ТЕОРЕМА 10.2.

Кожна ортогональна система ненульових векторів євклідового простору  $V$  може бути доповнена до ортогонального базису цього простору.

*Доведення:*

Нехай  $n$  - розмірність простору  $V$  і  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m\}$  - ортогональна система ненульових векторів з  $V$ . Якщо  $m=n$ , то доведення очевидне. Якщо  $m < n$ , то доведемо існування ортогональної системи ненульових векторів, що містить  $(m+1)$  вектор. Насправді, оскільки  $m < n$ , то в просторі  $V$  існує такий вектор  $\bar{b}$ , що система  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m, \bar{b}\}$  - лінійно незалежна.

Нехай  $\bar{a}_{m+1} = \bar{b} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{a}_i$  і підберемо коефіцієнти  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$

так щоб система  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m, \bar{a}_{m+1}\}$  була ортогональною.

Якщо  $k \leq m$ ;  $j \leq m$ ,  $k \neq j$ , то  $\bar{a}_k \bar{a}_j = 0$  за умовою. Нехай

$j=m+1$ , тоді  $\bar{a}_k \bar{a}_{m+1} = \bar{a}_k \left( \bar{b} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{a}_i \right) = \lambda_k \bar{a}_k \bar{a}_k + \bar{a}_k \bar{b}$ ,  $k \leq m$ .

Прирівнявши цей вираз до нуля отримуємо:

$$\lambda_k = \frac{\bar{a}_k \bar{b}}{\bar{a}_k \bar{a}_k}, (\bar{a}_k \bar{a}_k > 0), k=1, 2, \dots, m.$$

При такому виборі коефіцієнтів  $\lambda_i$  система векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m, \bar{a}_{m+1}\}$  буде ортогональною. Крім того,  $\bar{a}_{m+1} \neq 0$ , тому що система векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m, \bar{b}\}$  лінійно незалежна. Отже  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m, \bar{a}_{m+1}\}$  - ортогональна система ненульових векторів. Якщо  $m=n$ , то теорема доведена. Якщо ж  $m+1 < n$ , то продовжимо процес розширення ортогональної системи ненульових векторів, поки не отримаємо ортогональний базис.

#### НАСЛІДОК 10.1.

Будь-який євклідовий простір  $V$  має ортогональний базис.

#### Доведення:

Нехай  $\bar{a}_1 \in V$ ,  $\bar{a}_1$  - довільний ненульовий вектор. Нехай  $\{\bar{a}_1\}$  вихідна ортогональна система ненульових векторів і доповнимо її до ортогонального базису простору  $V$ .

#### ОЗНАЧЕННЯ 10.4.

Нехай  $M$  - непуста підмножина векторів євклідового простору  $V$ . Вектор  $\bar{a}$  називається ортогональним множині  $M$ , якщо  $\bar{a}$  ортогональний кожному вектору множини  $M$ .

Вектор  $\bar{a}$  ортогональний множині  $M$ , позначається так:  $\bar{a} \perp M$ . Через  $M^\perp$  позначають множину всіх векторів, ортогональних множині  $M$ .

За допомогою властивостей 3 і 4 скалярного добутку легко довести замкнутість множини  $M^\perp$  відносно додавання векторів і множення вектора на скаляр. Отже, в силу теореми 3.2,  $M^\perp$  - підпростір векторного простору  $V$ .

#### ОЗНАЧЕННЯ 10.5.

Нехай  $W$  - підпростір євклідового простору  $V$ . Підпростір  $M^\perp$  називається ортогональним доповненням до підпростору  $W$ .

### ТЕОРЕМА 10.3.

Якщо  $W$  - ненульовий підпростір евклідового простору  $V$ ,  $W \neq V$ , то  $V = W \oplus W^\perp$ .

*Доведення:*

Нехай  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m\}$  - ортогональний базис підпростору  $W$ . В силу теореми 3.2, вказану систему векторів можна доповнити до ортогонального базису простору  $V$ . Нехай  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m, \bar{a}_{m+1}, \dots, \bar{a}_n\}$  - ортогональний базис простору  $V$  ( $m < n$ ). Легко довести, що  $W^\perp = L(\bar{a}_{m+1}, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ . Тоді очевидно  $V = W \oplus W^\perp$ .

Теорема доведена.

### ОЗНАЧЕННЯ 10.6.

Нормою вектора евклідового простору називається арифметичний квадратний корінь зі скалярного квадрата вектора.

Норма вектора  $\bar{a}$  позначається через  $|\bar{a}|$ . За означенням  $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}\bar{a}}$ . Якщо  $|\bar{a}| = 1$ , то вектор  $\bar{a}$  називається нормованим.

### ТЕОРЕМА 10.4.

Якщо  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  - вектори евклідового простору, і  $\lambda \in R$  то:

- 1)  $|\bar{a}| \geq 0$ , причому  $|\bar{a}| = 0$  тоді і тільки тоді, коли  $\bar{a} = \bar{0}$ ;
- 2)  $|\lambda \bar{a}| = |\lambda| |\bar{a}|$ ;
- 3)  $|\bar{a} \bar{b}| \leq |\bar{a}| |\bar{b}|$  (нерівність Коши-Буняковського);
- 4)  $|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$  (нерівність трикутника).

*Доведення:*

- 1) Очевидно;
- 2)  $|\lambda \bar{a}| = \sqrt{(\lambda \bar{a})(\lambda \bar{a})} = \sqrt{\lambda^2 \bar{a}\bar{a}} = |\lambda| \sqrt{\bar{a}\bar{a}} = |\lambda| |\bar{a}|$ ;
- 3) Якщо  $\bar{a} = \bar{0}$  або  $\bar{b} = \bar{0}$ , то нерівність з пункту 3 виконується.

Нехай  $\bar{a} \neq \bar{0}$ ,  $\bar{b} \neq \bar{0}$ . Тоді для будь-яких  $\alpha, \beta \in R$ ,  $(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b})(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}) \geq 0$ ; звідси  $\alpha^2 \bar{a} \bar{a} + 2\alpha\beta \bar{a} \bar{b} + \beta^2 \bar{b} \bar{b} \geq 0$ .  
 Нехай  $\alpha = |\bar{b}|$ ,  $\beta = |\bar{a}|$ ; тоді  $|\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 + 2|\bar{a}||\bar{b}|\bar{a} \bar{b} + |\bar{b}|^2 |\bar{a}|^2 \geq 0$ ; або  $2|\bar{a}||\bar{b}|(|\bar{a}||\bar{b}| + \bar{a} \bar{b}) \geq 0$ . Оскільки  $|\bar{a}||\bar{b}| > 0$ , то  $|\bar{a}||\bar{b}| \geq -\bar{a} \bar{b}$ . Отримана нерівність справедлива для будь-яких ненульових векторів  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$ . Замінемо в ньому вектор  $\bar{a}$  на  $(-\bar{a})$ . Оскільки  $|- \bar{a}| = |\bar{a}|$  (п.2 теореми), то  $|\bar{a}||\bar{b}| \geq \bar{a} \bar{b}$ ; тому  $|\bar{a} \bar{b}| \leq |\bar{a}||\bar{b}|$ .

$$4) \quad |\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a} + \bar{b}||\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a}|^2 + 2\bar{a} \bar{b} + |\bar{b}|^2 \leq |\bar{a}|^2 + 2|\bar{a}||\bar{b}| + |\bar{b}|^2 = (|\bar{a}| + |\bar{b}|)^2$$

Оскільки  $|\bar{a} + \bar{b}| > 0$ , і  $|\bar{a}||\bar{b}| > 0$ , то добуваючи квадратний корінь з обох частин нерівності, отримаємо:  $|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$ .

### ОЗНАЧЕННЯ 10.7.

Система векторів євклідового векторного простору називається ортонормованою, якщо вона є ортогональною і кожен його вектор нормований. Якщо така система векторів утворює базис євклідового простору, то він називається ортонормованим базисом цього простору.

### ТЕОРЕМА 10.5.

| В євклідовому векторному просторі існує ортонормований базис.

*Доведення:*

В силу теореми 10.3, в євклідовому векторному просторі існує ортогональний базис  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$ . Оскільки  $\bar{a}_i \neq \bar{0}$ , то  $|\bar{a}_i| > 0$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . Очевидно система векторів  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n\}$ , де  $\bar{e}_i = \frac{1}{|\bar{a}_i|} \bar{a}_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  буде ортонормованим базисом нашого простору.



Алгоритм ортогоналізації системи векторів та приклад його застосування наведено в главі 11.

# Глава 11. Система „Світ лінійної алгебри”

В цій главі ми надаємо стислі відомості про програмне середовище „Світ лінійної алгебри” (СЛА), за допомогою якого читач може самостійно вивчати лінійну алгебру, в тому числі розв’язувати задачі з цієї дисципліни.

## *11.1 Загальні відомості*

### **Призначення системи Світ лінійної алгебри**

Основним призначенням СЛА є використання для самостійного оволодіння навчальним матеріалом з курсу „Лінійна алгебра”. Система надає можливість користувачу вести активну практичну діяльність, яка має риси пізнавальної, дослідницької, використовувати сучасні інформаційні технології як інструмент творчого процесу пізнання.

### **Розташування системи СЛА.**

<http://address.is.not.exist>

### **Структура системи СЛА**

Система СЛА в своєму складі має Робоче місце учня та Робоче місце вчителя.

### **Робоче місце учня**

Система СЛА складається з наступних функціональних компонентів:

„**Головна сторінка**”. Ця компонента дозволяє користувачу отримати необхідну інформацію про роботу з системою, зареєструватися на сайті навчального закладу для подальшої роботи та відкрити систему для використання.

„**Підручник**”. Компонента призначена для надання користувачу необхідної теоретичної допомоги. Підручник

представляє собою структурований гіпертекст з можливістю підтримки мультимедійних технологій.

Джерелом задач СЛА є „**Задачник**” – компонента системи, в якому містяться задачі. Система підтримує всі основні типи задач курсу лінійної алгебри. Кожну з задач Задачника можна експортувати в „Середовище розв’язування задач” і розв’язати в цьому середовищі. Розв’язані задачі та задачі, розв’язання яких вже розпочато, але не закінчено, зберігаються в „Зошиті” користувача.

„**Середовище для розв’язування задач**” – уніфіковане середовище для розв’язування та перевірки правильності розв’язування задач. Середовище підтримує покрокове рішення задачі з можливістю перевірки правильності розв’язування на кожному кроці. Важливою рисою є можливість виходу з „скрутих становищ”, коли користувач не знає, що робити далі. В цьому випадку він може звернутися за допомогою до „Експерта”, який виконає наступний крок розв’язання. Коли задачу розв’язано, середовище повідомляє про результат розв’язання задачі, та показує послідовність кроків - перетворень.

„**Дискусії**” – компонент призначено для спільного обговорення питань та проблем, які виникають у процесі вивчення предмету.

„**Статистика**” – компонент призначено для самоперевірки користувачів. У вигляді графіку зображується кількість розв’язаних задач, самостійність розв’язання, кількість нових та перевірених задач.

## **Взаємодія модулів СЛА**

Працювати з системою дистанційної освіти можуть лише зареєстровані користувачі. Реєстрація здійснюється вповноваженими на то особами –тьюторами або адміністратором сайту навчального закладу.

Для реєстрації потрібно надіслати заявку, в якій вказати дані про себе. Після цього студенту надається персональний ідентифікатор (надалі - Login) та пароль. Отримавши ці дані, студент може користуватися системою. Йому надається доступ до теоретичного матеріалу, задачника, дискусій, він отримує власний зошит для зберігання задач, які він розв’язує, та

можливість розв'язувати їх в середовищі для розв'язування задач.

Починаючи роботу з системою, користувач повинен ввести наданий йому Login та пароль в відповідні поля. Якщо дані введено невірно, то користувач отримує повідомлення „Хибні дані”. Якщо вказані дані введено правильно, студент отримує доступ до теоретичного матеріалу, задачника та зошита, має можливість користуватися „Середовищем для розв'язування задач”.

Для закінчення роботи з системою необхідно натиснути на кнопку „Logoff”. При цьому система безпеки знищить інформацію про користувача, і подальший доступ до ресурсів буде неможливим.

*Увага! Якщо користувач не буде звертатися до сервера протягом 20 хвилин, система безпеки здійснить автоматичне завершення роботи. Для продовження роботи необхідно знову ввести login та пароль.*

Після того, як користувач зайшов до системи, натиснувши на закладку „Підручник”, він має можливість переглянути теоретичний матеріал, який необхідний йому для розв'язування задач. Текст підручника містить гіперпосилання, таким чином вивчення матеріалу стає набагато легшим.

Ознайомившись з теоретичним матеріалом, користувач має можливість зайти до задачника, натиснувши на закладку „Задачник”. У задачнику зберігаються задачі для розв'язання. Вибравши собі задачі для розв'язання, користувач повинен натиснути на посилання „Додати до зошита”, при цьому умови обраних задач автоматично пересилаються до зошита.

Натиснувши на закладку „Зошит”, користувач отримує доступ до свого зошиту. В зошиті зберігаються задачі користувача, які поділені на 5 типів: нові задачі (які ще не розв'язувалися), нерозв'язані задачі (задачі, які користувач розв'язував, але до кінця не розв'язав), несамотійно вирішені задачі (розв'язані задачі, при розв'язанні яких користувач користувався послугами експерту), самотійно вирішені задачі (розв'язані задачі, при розв'язанні яких користувач не користувався послугами експерту), перевірені задачі (розв'язані задачі, які вже продивився вчитель і поставив оцінку). Натиснувши на закладку „Статистика” можна подивитися

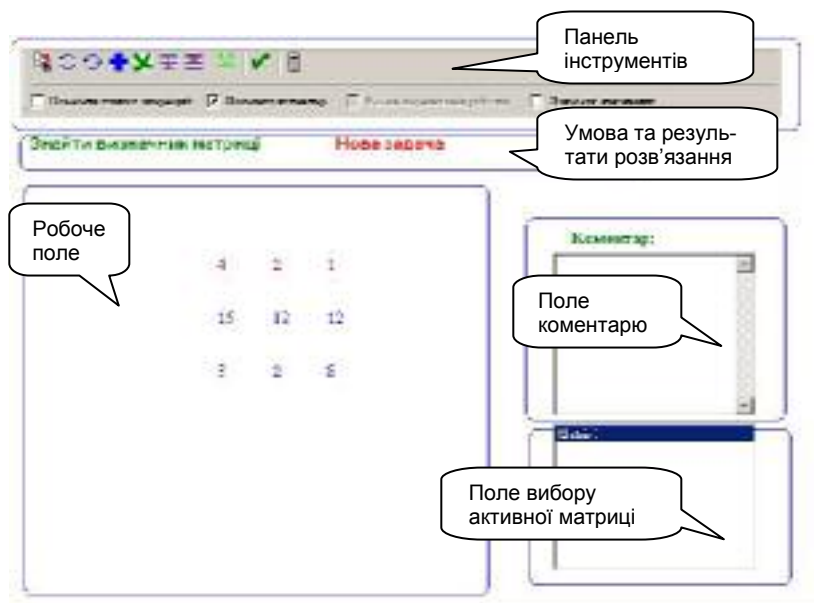
відношення цих задач у відсотках. Користувач має можливість видалити задачу з зошиту натиснувши на посилання „Видалити”. Для розв’язання чи перегляду задачі необхідно натиснути на посилання „Завантажити до середовища розв’язання”, при цьому задача автоматично завантажується до Середовища для розв’язування задач.

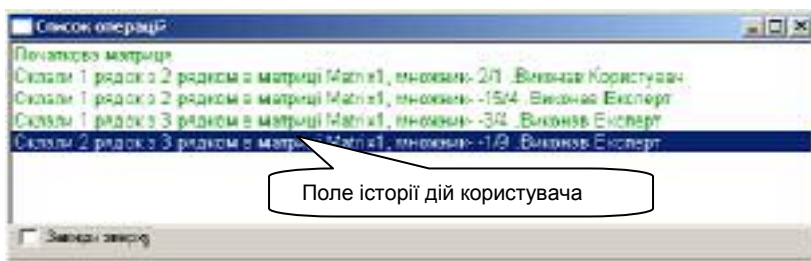
Натиснувши на закладку „Дискусії”, користувач має можливість обговорити питання та проблеми, які виникають у процесі вивчення предмету. Додати нову тему дискусії можна, натиснувши на посилання „Додати нову тему”.

### **Середовище розв’язування задач.**

Розглянемо більш детально основний компонент системи - *Середовище для розв’язування задач*.

Середовище має кілька областей для роботи – панель інструментів, поле відображення умови та результатів розв’язання, робоче поле, поле коментарю, поле вибору активної матриці.





Процес рішення задачі в „Середовищі розв’язування задач” представляє собою послідовність перетворень (кроків) висхідних математичних об’єктів таким чином, щоб отримати відповідь.

## 11.2 Система команд Середовища розв’язування задач

### Виконання перетворень матриці

Елементарні перетворення можна виконувати над рядками матриці.

- Виконати елементарне перетворення ( $\alpha \bar{a} + \bar{b}$ )** : лівою кнопкою миші виділити рядок  $\bar{b}$  і натиснути праву клавішу миші. У контекстному меню вибрати команду „Виконати елементарне перетворення”. Відкриється вікно вводу множника. Введіть множник і  $\alpha$  натисніть ОК. Потім, взявши мишкою рядок  $\bar{b}$ , необхідно перетягнути його на рядок  $\bar{a}$  (рядок, до якого додається  $\alpha \bar{a}$ ).
- Переставити рядки місцями**: натискаємо праву клавішу миші на рядку, розташування якого ми хочемо поміняти та у контекстному меню вибираємо команду „Переставити рядки місцями”. Потім, взявши мишкою перший рядок, перетягуємо його на рядок, з яким ми його хочемо поміняти місцями.
- Переставити стовпці місцями**: натискаємо праву клавішу миші на стовпці, розташування якого ми хочемо

поміняти та у контекстному меню вибираємо команду „*Переставити стовпці місцями*”. Потім, взявши мишкою перший стовпець, перетягуємо його на стовпець, з яким ми його хочемо поміняти місцями.

- **Помножити рядок на число:** виділяємо необхідний рядок лівою клавішею миші та натискуємо праву. В контекстному меню вибираємо команду „*Помножити рядок на число*”. Відкриється вікно вводу множника. Треба ввести множник і натиснути на **ОК**.
- **Додати нульовий рядок:** лівою клавішею миші виділяємо рядок, перед яким необхідно вставити нульовий, та натискуємо праву. В контекстному меню вибираємо команду „*Додати нульовий рядок*”.
- **Видалити нульовий рядок:** лівою клавішею миші виділяємо нульовий рядок та натискуємо праву. В контекстному меню вибираємо команду „*Видалити нульовий рядок*”.

### **Виконання операцій над матрицями**

- **Додати матриці:** виділити лівою клавішею першу матрицю та в контекстному меню вибрати „Додати матриці”. Потім перетягнути виділену матрицю на матрицю, до якої необхідно додати першу.
- **Помножити матрицю на число:** виділити лівою клавішею першу матрицю та в контекстному меню вибрати „Помножити матрицю на число”. Відкриється вікно вводу множника. Введіть його і натисніть **ок**.
- **Перемножити матриці:** виділити лівою клавішею першу матрицю та в контекстному меню вибрати „Перемножити матриці”. Потім перетягнути виділену матрицю на матрицю, на яку необхідно помножити першу.
- **Транспонувати матрицю:** виділити лівою клавішею матрицю та в контекстному меню вибрати „Транспонувати матрицю”.

- **Знайти обернену матрицю:** виділити лівою кавішею матрицю та в контекстному меню вибрати „Знайти обернену матрицю”.
- **Знайти визначник матриці:** виділити лівою кавішею матрицю та в контекстному меню вибрати „Знайти визначник матриці”.
- **Знайти характеристичний многочлен:** виділити лівою кавішею матрицю та в контекстному меню вибрати „Знайти характеристичний многочлен”.
- **Знайти власні значення та вектори:** виділити лівою кавішею матрицю та в контекстному меню вибрати „Знайти власні значення та вектори”.

### 11.3 Вправи

#### 11.3.1 Системи лінійних рівнянь.

Метод Гауса розв'язання системи лінійних рівнянь полягає у послідовному виключенні змінних з рівнянь згаданої системи за допомогою елементарних перетворень. розглянемо відповідні приклади.

Приклад1. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28 \\ 7x + 3y - 6z = -1 \\ 7x + 9y - 9z = 5 \\ 4x - 2y + 15z = 62 \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 7 & 3 & -6 & -1 \\ 7 & 9 & -9 & 5 \\ 4 & -2 & 15 & 62 \end{pmatrix}$$

Застосуємо алгоритм виключення змінних за допомогою перетворень над рядками розширеної матриці;



$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 7 & 3 & -6 & -1 \\ 7 & 9 & -9 & 5 \\ 4 & -2 & 15 & 62 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 0 & 17 & -75/2 & -99 \\ 0 & 23 & -81/2 & -93 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 17 & -75/2 & -99 \\ 0 & 23 & -81/2 & -93 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -89 & -116 \\ 0 & 0 & -29 & -116 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -29 & -116 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отже, дана система лінійних рівнянь є еквівалентною системі:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28 \\ 2y - z = 2 \\ -29z = -116 \end{cases}$$

Звідси отримаємо;

$$z = 4, 2y - 4 = 2, 2y = 6, y = 3, 2x - 12 + 36 = 28, 2x = 4, x = 2.$$

Отже розв'язком системи є вектор (2,3,4).

Приклад 2 . Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 5 \\ 2x - y - z = 2 \\ x + y + 10z = 6 \end{cases}$$

Розглянемо розширену матрицю системи і перетворимо її.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 10 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 6 \\ 0 & -4 & -28 & -13 \\ 0 & -3 & -21 & -10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 13/4 \\ 0 & 1 & 7 & 10/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 13/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/12 \end{pmatrix}$$

Отримали систему, у якій останнє рівняння має вигляд  $0=1/12$ . отже дана система лінійних рівнянь не є сумісною.

Приклад 3. Розв'яжемо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x + 2y + z + 2t = 0 \\ 2x - y + 3z - 2t = 0 \\ 7x - y + 10z - 4t = 0 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Дана система є однорідною. Запишемо її основну матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 7 & -1 & 10 & -4 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -6 \\ 0 & -15 & 3 & -18 \\ 0 & -5 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отримали систему:

$$\begin{cases} x + 2y + z + 2t = 0 \\ -5y + z - 6t = 0 \end{cases}$$

Отримали систему з 4-ма змінними та 2-ма рівняннями. Її ранг дорівнює 2, тому, що дві змінні є незалежними. Нехай це будуть змінні  $y$  і  $t$ . Перенесемо залежні змінні у ліві частини рівнянь;

$$\begin{cases} x + z = -2y - 2t \\ z = 5y + 6t \end{cases}$$

Знайдемо загальний розв'язок системи:

$$(-7y-8t, y, +5y+6t, t).$$

Знайдемо фундаментальну систему розв'язків; надаємо змінним  $y$  і  $t$  відповідно значення  $(1,0)$ , а потім  $(0,1)$ . Тоді отримаємо два вектора:  $(-7, 1, 5, 0)$  і  $(-8, 0, 6, 1)$ . Ці два вектора складають фундаментальну систему розв'язків.

Приклад 4. Розв'язати систему лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$$

Розглянемо розширену матрицю системи:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отже дана система є еквівалентною системі:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ -y + z = -1 \end{cases}$$

Ця система 3-х змінних має ранг 2, тому одна із змінних є вільною. Будемо вважати вільною змінну  $z$ , тоді  $y=z+1$ ,  $x+2y-4z=1$ ,  $x+2z+2-4z=1$ ,  $x=2z-1$ . Отже загальним розв'язком даної системи є вектор  $(2z-1, z+1, z)$ . Якщо надати  $z$  значення, наприклад, 0, отримаємо частинний розв'язок  $(-1, 1, 0)$ .

Загальним розв'язком відповідної однорідної системи лінійних рівнянь є вектор  $(2z, z, z)$ .

Якщо надати  $z$  значення 1, то отримаємо фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи, яка у даному випадку складається з одного вектору  $(2, 1, 1)$ .

### Розв'язок системи лінійних рівнянь за формулами Крамера

Нехай дано квадратну систему лінійних рівнянь, тобто систему у якій число рівнянь дорівнює кількості змінних.

**Приклад.** Знайти рішення системи лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

### **Розв'язок.**

Для розв'язання треба визначити - являється основна матриця системи  $A$  невиродженою чи ні. Якщо так, то знайти єдине рішення по формулам Крамера:  $x_i = |B_i|/|A|$ , де  $B_i$  - матриця, отримана з  $A$  заміною стовпця коефіцієнтів при змінній  $x_i$  на стовпець вільних членів.

Складемо матрицю з коефіцієнтів даної системи і знайдемо її ранг за допомогою елементарних перетворень.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця  $A$  еквівалентна матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Матриця  $A$  невироджена, її ранг дорівнює 3.

Система лінійних рівнянь має єдине рішення. Для використання формул Крамера обчислимо визначник матриці  $A$ . Він дорівнює одиниці ( $2 \cdot 1 \cdot 1/2 = 1$ ).

Знайдемо  $x_1$ . Для цього утворимо  $B_1$ , заміною першого стовпця на стовпець вільних членів, і обчислимо визначник.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad |B_1| = -2, \quad x_1 = |B_1|/|A|, \quad x_1 = -2/1 = -2.$$

По аналогії знайдемо  $x_2$  і  $x_3$ .

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |B_2| = 4, \quad x_2 = |B_2|/|A|, \quad x_2 = 4/1 = 4.$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad |B_3| = -2, \quad x_3 = |B_3|/|A|, \quad x_3 = -2/1 = -2.$$

Таким чином рішенням системи є  $x_1=-2$ ,  $x_2=4$ ,  $x_3=-2$ .

### Тема “Системи лінійних рівнянь”

**Завдання: Розв’язати систему лінійних рівнянь.**

Вправа №1

$$\begin{cases} 2x & -y & -z & -t & -u & =1 \\ 3x & -6y & +4z & -3t & & =14 \\ 2x & -2y & +3z & & +u & =8 \\ x & -y & +z & +t & +u & =2 \\ x & +y & & +2t & +u & =-1 \end{cases}$$

Вправа №2

$$\begin{cases} 3x & & +z & -2t & 2u & =11 \\ x & +y & +z & -t & +u & =5 \\ 2y & +z & +t & +u & & =4 \\ 4x & -3y & & -6t & +5u & =20 \\ 3x & +y & +z & +t & -2u & =0 \end{cases}$$

### Вправа №3

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ x \\ 2x \\ x \\ x \\ 2x \end{array} \right. \begin{array}{l} -4y \\ +3y \\ +3y \\ +6y \\ +z \\ +y \end{array} \begin{array}{l} +3z \\ \\ -2z \\ -2z \\ +z \\ +3z \end{array} \begin{array}{l} -t \\ -t \\ +t \\ +t \\ -t \\ -2t \end{array} \begin{array}{l} \\ +2u \\ -u \\ +u \\ +u \\ +2u \end{array} \begin{array}{l} =-9 \\ =0 \\ =6 \\ =11 \\ =-4 \\ =-5 \end{array}$$

### Вправа №4

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ 2x \\ y \\ 2x \\ x \end{array} \right. \begin{array}{l} -3y \\ -4y \\ -3z \\ -3y \\ -2y \end{array} \begin{array}{l} +3z \\ +4z \\ \\ +2z \\ +z \end{array} \begin{array}{l} -t \\ -t \\ +4u \\ \\ -t \end{array} \begin{array}{l} -4u \\ -5u \\ =-10 \\ -4u \\ -2u \end{array} \begin{array}{l} =9 \\ =14 \\ \\ =13 \\ =4 \end{array}$$

### Вправа №5

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x \\ 2x \\ x \\ x \\ y \end{array} \right. \begin{array}{l} +3y \\ +2y \\ +2y \\ +y \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} +z \\ +2z \\ +2z \\ +z \\ +t \end{array} \begin{array}{l} +t \\ +t \\ +2t \\ +2t \\ +u \end{array} \begin{array}{l} +u \\ \\ +u \\ +u \\ =2 \end{array} \begin{array}{l} =8 \\ =7 \\ =7 \\ =4 \\ \end{array}$$

### Вправа №6

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ x \\ x \\ 2x \\ 3x \\ 2x \end{array} \right. \begin{array}{l} +2y \\ +y \\ \\ +2y \\ +2y \\ +y \end{array} \begin{array}{l} +2z \\ +2z \\ +z \\ +z \\ +2z \\ +3z \end{array} \begin{array}{l} +t \\ +2t \\ +t \\ +t \\ +t \\ +3t \end{array} \begin{array}{l} \\ +u \\ +u \\ \\ +u \\ +2u \end{array} \begin{array}{l} =7 \\ =7 \\ =2 \\ =6 \\ =6 \\ =9 \end{array}$$

### Вправа №7

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ -x \\ 2x \\ 2x \\ 3x \end{array} \right. \begin{array}{l} +y \\ +y \\ +y \\ +y \\ +2y \end{array} \begin{array}{l} +2z \\ \\ +2z \\ +4z \\ +6z \end{array} \begin{array}{l} +t \\ +5t \\ +2t \\ \\ +t \end{array} \begin{array}{l} -u \\ +5u \\ \\ -4u \\ -5u \end{array} \begin{array}{l} =0 \\ =0 \\ =0 \\ =0 \\ =0 \end{array}$$

Вправа №8

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ 2x \\ x \\ 2x \\ x \end{array} \right. \begin{array}{l} +2y \\ +5y \\ +3y \\ +3y \\ +2y \end{array} \begin{array}{l} +2z \\ +3z \\ +2z \\ +5z \\ +z \end{array} \begin{array}{l} +3t \\ +6t \\ +5t \\ +3t \\ +t \end{array} \begin{array}{l} -2u \\ -u \\ +3u \\ -4u \\ -4u \end{array} \begin{array}{l} =0 \\ =0 \\ =0 \\ =0 \\ =0 \end{array}$$

Вправа №9

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x \\ 2x \\ x \\ x \\ 3x \end{array} \right. \begin{array}{l} +y \\ +2y \\ +2y \\ +y \\ +2y \end{array} \begin{array}{l} +3z \\ +5z \\ +3z \\ +z \\ +4z \end{array} \begin{array}{l} +2t \\ +4t \\ +4t \\ +2t \\ +4t \end{array} \begin{array}{l} -u \\ -u \\ -2u \\ -2u \\ -3u \end{array} \begin{array}{l} =0 \\ =0 \\ =0 \\ =0 \\ =0 \end{array}$$

Вправа №10

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ 2x \\ 2x \\ x \\ x \end{array} \right. \begin{array}{l} +3y \\ +4y \\ +10y \\ -y \\ +y \end{array} \begin{array}{l} -2z \\ -5z \\ -3z \\ -3z \\ -3z \end{array} \begin{array}{l} +t \\ +5t \\ -5t \\ +8t \\ +6t \end{array} \begin{array}{l} +3u \\ +5u \\ +10u \\ -u \\ +u \end{array} \begin{array}{l} =0 \\ =0 \\ =0 \\ =0 \\ =0 \end{array}$$

Вправа №11

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x \\ x \\ 2x \\ x \\ x \end{array} \right. \begin{array}{l} +3y \\ +y \\ +3y \\ +2y \\ +2y \end{array} \begin{array}{l} +2z \\ -z \\ +z \\ +3z \\ +4z \end{array} \begin{array}{l} -2t \\ -t \\ \\ -2t \\ -2t \end{array} \begin{array}{l} +u \\ \\ -3u \\ +3u \\ +3u \end{array} \begin{array}{l} =0 \\ =0 \\ =0 \\ =0 \\ =0 \end{array}$$

Вправа №12

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ x \\ 3x \\ x \\ 2x \end{array} \right. \begin{array}{l} +3y \\ +y \\ +y \\ -3y \\ -2y \end{array} \begin{array}{l} +3z \\ +2z \\ +6z \\ +z \\ +3z \end{array} \begin{array}{l} -4t \\ -3t \\ -9t \\ -2t \\ -4t \end{array} \begin{array}{l} +2u \\ +u \\ +3u \\ +3u \\ +3u \end{array} \begin{array}{l} =0 \\ =0 \\ =0 \\ =0 \\ =0 \end{array}$$

### 11.3.2 Обчислення визначника матриці

Алгоритм обчислення визначника: елементарними перетвореннями приводимо матрицю до діагонального (або трикутного) виду. Пам'ятаємо, що перестановка рядків чи стовпців змінює знак визначника. Визначник обчислюємо як добуток елементів головної діагоналі матриці.

**Приклад.** Знайти визначник матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Розв'язок.**

При розв'язку задачі Ваші дії такі, як при обчисленні рангу матриці. Продемонструємо алгоритм на прикладі таблиці.

Крок	Дія	Результат
------	-----	-----------

Рядок 2=рядок 1 *1/3+рядок 2	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4/3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
------------------------------	---

Рядок 3=рядок 1 *-1+рядок 3	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4/3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
-----------------------------	--

Рядок 4=рядок 1 *-2/3+рядок 4	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4/3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1/3 \end{pmatrix}$
-------------------------------	---

Рядок 3=рядок 2 *-1+рядок 3	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -2 & -4/3 \\ 0 & 1 & 2 & -1/3 \end{pmatrix}$
-----------------------------	--

Рядок 4=рядок 2 *1+рядок 4	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -2 & -4/3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
----------------------------	---



Рядок 4=рядок 3 \*5/2+рядок 4

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -2 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & -7/3 \end{pmatrix}$$

Отримана матриця має трикутний вид. Перемножимо елементи головної діагоналі:  $3 \cdot -1 \cdot -2 \cdot -7/3 = -14$ . Визначник вихідної матриці дорівнює -14.

## Тема "Визначники"

**Завдання: Знайти визначник матриці**

Вправа №1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №3

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №5

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №6

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №7

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №8

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №9

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №10

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

1	2	3	1
1	1	2	2
0	3	1	3
2	2	0	0

Вправа №11

1	1	1	3
3	3	3	0
3	2	1	2
2	1	3	1

Вправа №12

3	2	2	0
2	2	1	1
3	1	2	3
1	1	0	3

Вправа №13

0	2	3	4
1	0	3	4
1	2	0	4
1	2	3	0

Вправа №14

1	3	3	1
2	2	1	3
2	0	3	3
0	1	2	1

Вправа №15

2	2	0	3
3	3	0	0
2	2	2	1
1	2	2	1

### 11.3.3 Обернена матриця

Для знаходження оберненої матриці можна скористуватися тією властивістю, що елементарні перетворення, які приводять невироджену матрицю до одиничної, приводять також одиничну матрицю до матриці, яка є оберненою до даної. Працюючи у режимі паралельної роботи, виконуючи одночасно елементарні перетворення над двома матрицями, вихідною і одиничною, ви отримаєте з одиничної обернену матрицю.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Приклад.** Побудувати обернену матрицю

**Розв'язок.**

За допомогою елементарних перетворень, (див. Обчислення рангу матриці, Обчислення визначника матриці), приведемо вихідну матрицю до одиничної, а одинична одночасно стане оберненою.

Продемонструємо процес перетворень на прикладі

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Рядок 2=рядок 1\*-3+рядок 2;

Рядок 3=рядок 1\*-2+рядок 3;

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Рядок 2=рядок 2\*-1/4;

Рядок 3=рядок 3\*-1/3

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/4 & 3/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 \end{array} \right)$$

Рядок 1=рядок 3\*-2+рядок1;

Рядок 2=рядок3\*-5/4+рядок2

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/12 & -1/4 & 5/12 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 \end{array} \right)$$

Рядок 1=рядок2\*-1+рядок1

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/12 & -1/4 & 5/12 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 \end{array} \right)$$

Матриця, яка отримана з одиничної є оберненою

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/12 & -1/4 & 5/12 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$A = A^{-1} = E$$

Для перевірки треба перемножити вихідну матрицю на обернену і отримати одиничну.

## Тема "Обернені матриці"

Завдання: Знайти обернену матрицю

Вправа №1

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №3

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №7

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №8

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №9

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №10

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & -3 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №11

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & 8 & 2 \\ 2 & 5 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №12

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

### 11.3.4 Характеристичний многочлен лінійного оператора

Многочлен  $f(x) = |xE - A|$  називається характеристичним многочленом лінійного оператора  $\varphi$ , а рівняння  $f(x)=0$  називається характеристичним рівнянням лінійного оператора (глава 8).

Для знаходження коефіцієнтів характеристичного многочлена вихідної матриці використовується метод інтерполяції. Він полягає в наступному: по відомих значеннях многочлена в вибраних точках визначають коефіцієнти цього многочлена. Характеристичний многочлен матриці  $A$  має вигляд

$$f(x)=(-x)^n+c_1x^{n-1}+...+c_{n-1}x+c_n, \text{ де } n\text{- порядок визначника.}$$

Розглянемо побудову характеристичного многочлена для матриці порядку  $6 \times 6$ . Візьмемо точки  $2, 1, 1/2, -1/2, -1, -2$ , в яких обчислимо значення визначника  $|x_0E - A|$ . Підставимо замість  $x_0$  вибрані значення в рівняння

$$(-x_0)^6 + c_1x_0^5 + c_2x_0^4 + c_3x_0^3 + c_4x_0^2 + c_5x_0 + c_6 = 0.$$

Отримаємо систему лінійних рівнянь, яку в матричній формі можна записати так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/32 \\ 1 & -1/2 & 1/4 & -1/8 & 1/16 & -1/32 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_6 \\ c_5 \\ c_4 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(2) - 64 \\ \det(1) - 1 \\ \det(1/2) - 1/64 \\ \det(-1/2) - 1/64 \\ \det(-1) - 1 \\ \det(-2) - 64 \end{pmatrix}$$

або  $B \cdot X = C$ .

Визначник цієї системи не дорівнює нулю, отримана система має розв'язки. Обчисливши матрицю  $B^{-1}$  і виконавши множення  $B^{-1} \cdot C$ , отримаємо вектор-стовпець, елементами якого будуть потрібні коефіцієнти характеристичного многочлена.

Ви можете вибрати за бажанням свої точки. В загальному випадку система лінійних рівнянь виглядає так:



$$\begin{pmatrix} (x_1)^0 & (x_1)^1 & (x_1)^2 & \dots & (x_1)^{n-1} \\ (x_2)^0 & (x_2)^1 & (x_2)^2 & \dots & (x_2)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_n)^0 & (x_n)^1 & (x_n)^2 & \dots & (x_n)^{n-1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ \dots \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(x_1) - (-x_1)^n \\ \det(x_2) - (-x_2)^n \\ \dots \\ \det(x_n) - (-x_n)^n \end{pmatrix}$$

де  $n$  - порядок визначника, а  $\det(x_i) = |x_i E - A|$ ,  $i = \overline{1, n}$

Для знаходження раціональних коренів многочлену використовується наступна теорема:

якщо раціональне число є коренем многочлену з цілими коефіцієнтами, то його чисельник є дільником вільного члену, а знаменник - дільником коефіцієнту при найбільшому ступеню.

Якщо многочлен має раціональні коефіцієнти, то перед тим як використовувати цю теорему треба многочлен помножити на найменший спільний дільник.

**Приклад.** Побудувати характеристичний многочлен і знайти його корені для матриці лінійного оператора

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

### **Розв'язок.**

Для визначення коефіцієнтів характеристичного многочлену, розв'яжемо систему лінійних рівнянь. Вихідна матриця має порядок  $4 \times 4$ , тому візьмемо точки 2, 1,  $1/2$ ,  $-1/2$ . Для кожного значення обчислимо  $(-x_0)^4 + c_1 x_0^3 + c_2 x_0^2 + c_3 x_0 + c_4 = 0$ . В матричній формі систему лінійних рівнянь можна записати так:

$$B * X = C$$

(\*)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 1 & -1/2 & 1/4 & -1/8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_4 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(2) - 16 \\ \det(1) - 1 \\ \det(1/2) - 1/16 \\ \det(-1/2) - 1/16 \end{pmatrix}$$

де  $\det(2) = |2^*E-A|$ ,  $\det(1) = |1^*E-A|$ ,  $\det(1/2) = |1/2^*E-A|$ ,  
 $\det(-1/2) = |-1/2^*E-A|$ .

Таким чином алгоритм побудови характеристичного многочлену такий:

- знайти обернену матрицю  $B^{-1}$ ;
- обчислити визначники  $|2^*E-A|$ ,  $|1^*E-A|$ ,  $|1/2^*E-A|$ ,  $|-1/2^*E-A|$ ;
- обчислити стовпець C;
- перемножити  $B^{-1}$  на C-це буде стовпець потрібних коефіцієнтів.

Знайдемо матрицю  $B^{-1}$  (див. Знаходження оберненої матриці).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 1 & -1/2 & 1/4 & -1/8 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/15 & -2/3 & 4/3 & 4/15 \\ -1/15 & 1/3 & 2/3 & -14/15 \\ -4/15 & 8/3 & -10/3 & 14/15 \\ 4/15 & -4/3 & 4/3 & -4/15 \end{pmatrix}.$$

Для обчислення визначника  $|2^*E-A|$ , треба побудувати матрицю  $(2^*E-A)$ . Отриману матрицю приведемо до діагонального або трикутного вигляду і перемножимо діагональні елементи - це буде визначник (див. 10.3.3.)

$$(2^*E-A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ця матриця еквівалентна матриці  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ , тому

визначник  $|2^*E-A| = 2$ . Але від нього треба ще відняти число 16 (це  $2^4$ ). Отриманий результат буде першим числом у вектор-стовпцю вільних членів системи лінійних рівнянь (\*). У нашому прикладі отримали  $2 - 16 = -14$ .

За такою ж технологією обчислимо  $|1^*E-A| - 1$ ,  $|1/2^*E-A| - 1/16$ ,  $| -1/2^*E-A| - 1/16$ .

$|1^*E-A| - 1 = 0 - 1 = -1$ ,  $|1/2^*E-A| - 1/16 = -1/16 - 1/16 = -1/8$ ,

$| -1/2^*E-A| - 1/16 = 27/16 - 1/16 = 13/8$ .

Отримали стовпець вільних членів  $C = (-14, -1, -1.8, 13.8)^T$  системи лінійних рівнянь (\*).

Помножимо  $B^{-1}$  на отриманий стовпець  $C$ .

$$B^{-1} * C = \begin{pmatrix} 1/15 & -2/3 & 4/3 & 4/15 \\ -1/15 & 1/3 & 2/3 & -14/15 \\ -4/15 & 8/3 & -10/3 & 14/15 \\ 4/15 & -4/3 & 4/3 & -4/15 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -14 \\ -1 \\ -1/8 \\ 13/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Отримали стовпець коефіцієнтів характеристичного многочлену.

$$X = \begin{pmatrix} c_4 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, c_4 = 0, c_3 = -1, c_2 = 3, c_1 = -3.$$

Таким чином, характеристичний многочлен має вид  $F(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$ .

### Знаходження власних значень лінійного оператора.

Власні значення лінійного оператора є коренями характеристичного многочлену. Знаходження раціональних коренів відбувається методом ділення даного многочлену на многочлен першого ступеню  $(x - \alpha)$ , де  $\alpha$  - дільник вільного члену.

При діленні многочлена на многочлен скористуємося схемою Горнера.

Корені многочлену  $F(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$  будемо шукати серед дільників коефіцієнту при змінній  $x$ . Дільники  $\{1, -1\}$ .

При  $\alpha_1 = 1$  отримаємо схему Горнера:

	<b>3</b>	<b>1</b>
	2	
	1	

$\alpha_1 = 1$  корінь кратності 3.

Візьмемо наступний дільник  $-1$ . При  $\alpha_2 = -1$  отримаємо схему Горнера:

		3	1
1		4	8

$\alpha_2$  не є коренем многочлену.

Таким чином раціональними коренями будуть  $\{0, 1$  кратності 3}.

Приклади матриць, які можна використовувати при розв'язку цієї задачі за вказаним алгоритмом.

$B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$B^{-1}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/6 & -1/6 \\ 2/3 & -2/3 & -1/2 & 1/2 \\ -1/6 & -1/6 & 1/6 & 1/6 \\ -1/6 & 1/6 & 1/12 & -1/12 \end{pmatrix}$$

Тема "Характеристичний многочлен"

Завдання: Знайти характеристичний многочлен для матриці лінійного оператора.

Вправа №1

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -7 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ 2 & 6 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №3

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №4

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1,5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Вправа №5

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0,5 & 1 \\ -1,5 & -4 & -1 & -1,5 \\ 3,5 & 8 & 1,5 & 3,5 \\ 3,5 & 5 & -1 & 4,5 \end{pmatrix}$$

Вправа №6

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & 4 & -6 \\ 9 & 7 & -6 & 9 \\ -18 & -10 & 14 & -18 \\ -15 & -6 & 12 & -14 \end{pmatrix}$$

Вправа №7

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & 4 & 0 \\ 1 & 14 & 5 & 1 \\ 2 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №8

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & -6 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №9

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -4 & 1 \\ -4 & 8 & 8 & -2 \\ -4 & 6 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №10

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 0 \\ -6 & -7 & 0 & -2 \\ 12 & 12 & -1 & 4 \\ 10 & 6 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Вправа №11

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \\ -2 & 7 & 1 & 5 \\ -4 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №12

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -7 \\ 3 & 2 & -6 & 9 \\ -6 & -2 & 13 & -18 \\ -7 & -3 & 10 & -14 \end{pmatrix}$$

Вправа №13

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 \\ 2,5 & 1 & 2,5 & 0,5 \\ -2,5 & -1 & 1,5 & 1,5 \\ 9,5 & 3 & 6,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

### 11.3.5 Власні вектори лінійного оператора

Для знаходження власного значення лінійного оператора необхідно розв'язати характеристичне рівняння  $|xE-A|=0$ , де  $E$ - одинична матриця,  $A$ - матриця даного оператора.

Для обчислення власного вектора лінійного оператора, відповідного знайденому власному значенню, треба розв'язати рівняння  $Ax=sx$ , яке можна записати так:  $(A-sE)x=0$ , де  $A$ - матриця лінійного оператора,  $s$ - власне значення. Це рівняння рівносильне системі лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} (a_{11} - s)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - s)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - s)x_n = 0 \end{cases}$$

Так як ранг матриці  $A-sE$  менше ніж  $n$ , то система має ненульовий розв'язок. Фактично, достатньо знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь.

**Приклад.** Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

#### **Розв'язок.**

Алгоритм розв'язання:

- скласти характеристичне рівняння лінійного оператора;
- знайти корені характеристичного рівняння - це будуть власні значення лінійного оператора (див. тему Характеристичний многочлен лінійного оператора);
  - для кожного власного значення знайти координати власних векторів цього оператора, які належать власному значенню;
  - розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь (див. Рішення систем лінійних рівнянь).

В прикладі розглянуто матрицю, для якої вже побудовано характеристичний многочлен і знайдені власні значення (Див. розділ “Характеристичний многочлен лінійного оператора”).

$F(x)=x^4-3x^3+3x^2-x$ . Раціональні корені–  $\{0, 1 \text{ кратності } 3\}$ .

Для власного значення 0 складемо систему лінійних однорідних рівнянь.  $(A-0 \cdot E)=0$ .

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 - 2x_4 = 0 \\ 0x_1 - 1x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 \\ 0x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 0x_1 - 1x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Знайдемо фундаментальну систему рішень. (див. Рішення систем лінійних рівнянь). Часне рішення – це вектор  $(0, 0, 0, 0)$ , фундаментальне рішення –  $(1, 0, 1, 1)$ .

По аналогії будуємо систему для власного значення 1 і знаходимо фундаментальну систему рішень.  $(A-1 \cdot E)=0$

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 - 2x_4 = 0 \\ 0x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 \\ 0x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 0x_1 - 1x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Часне рішення – це вектор  $(0, 0, 0, 0)$ , фундаментальне рішення –  $(0, 0, 0, 1)$ .

Власні вектори:

для власного значення 0 –  $(1, 0, 1, 1)$ ,

для власного значення 1 –  $(0, 0, 0, 1)$ .



## Тема "Власні вектори лінійного оператора"

Завдання: Знайти власні значення та власні вектори для матриці лінійного оператора

Вправа №1

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Вправа №2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №3

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 6 \\ 4 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Вправа №4

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №5

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Вправа №6

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №7

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №8

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №9

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №10

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №11

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №12

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ -6 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №13

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №14

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

### 11.3.6 Обчислення рангу матриці

Щоб знайти ранг матриці треба привести її до ступінчатого виду, користуючись методом елементарних перетворень. Кількість ненульових рядків і дорівнює рангу матриці.

**Приклад.** Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

**Розв'язок.**

Помножимо перший рядок на «-2» і додамо до третього рядка, помноженого на «1». У результаті отримаємо еквівалентну матрицю

$$\begin{array}{l} \begin{matrix} *_{-2} \\ \downarrow \\ *_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Продовжуючи цей процес, обчислимо наступну матрицю, у якої рядок 3=рядок 2 \*1+ рядок 3 \*1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Так як максимальна кількість ненульових рядків матриці дорівнює 3, то ранг матриці також дорівнює 3.

## Тема "Ранг матриці"

Завдання: Знайти ранг матриці

Вправа №1

2	3	3	1	0	1
1	0	3	2	2	3
0	1	3	3	2	0
2	0	2	2	0	0
3	3	0	3	1	1
0	2	0	0	1	2

Вправа №2

1	1	1	0	1	0
3	1	3	0	0	1
1	3	2	2	3	1
2	1	1	0	3	2
1	0	3	1	3	2
3	1	2	3	1	2

Вправа №3

0	0	1	1	2	1
1	2	3	1	2	3
1	2	0	0	0	0
3	3	0	1	2	3
2	3	2	3	0	3
2	3	3	3	2	3

Вправа №4

1	2	3	3	1	1
1	3	0	1	0	3
2	5	1	2	1	6
1	2	1	1	1	3
1	2	3	3	2	1
1	1	1	1	3	2

Вправа №5

3	0	3	0	3	3
1	4	6	7	6	3
3	1	0	1	0	1
0	0	3	3	3	1
1	2	3	2	3	0
0	2	0	3	0	2

Вправа №6

2	1	1	0	3	2
1	2	1	2	2	2
-2	2	2	3	-3	-2
3	3	2	2	5	2
-4	1	1	3	-6	4
0	3	3	3	0	0

Вправа №7

0	3	2	0	1	2
3	3	1	2	2	0
3	0	-1	2	1	-2
0	1	3	2	1	3
2	0	3	0	0	0
2	2	9	4	2	6

Вправа №8

1	1	-2	1	3	1
3	2	1	2	3	1
2	1	3	1	0	0
3	1	3	3	3	0
0	-1	2	1	1	0
3	2	1	2	2	0

### 11.3.7 Жорданова форма матриці

Для побудови жорданової матриці необхідно:

- побудувати характеристичний многочлен матриці  $A$ ;
- знайти корені характеристичного многочлену - власні значення матриці  $A$ ;
- побудувати жорданові клітини для кожного власного значення за таким алгоритмом:
  - Фіксуємо яке-небудь власне значення  $q$ , далі обчислимо ранги наступних матриць:
    - $\text{rang}(A-qE)=r_1, \text{rang}(A-qE)^2=r_2, \dots, \text{rang}(A-qE)^i=r_i$ , доки  $r_i=r_{i-1}$ .
  - Обчислюємо значення  $m_k$ :  $m_1=n-r_1, \dots, m_k=n-r_k-(m_1+\dots+m_{k-1})$  для  $k$  від 2 до  $i$ .
  - Якщо значення  $m_k$  знайдені, то  $m_1$  - число жорданових клітин, відповідних власному значенню  $q$ ,  $m_1-m_2$  - число жорданових клітин порядку 1,  $m_2-m_3$  - число жорданових клітин порядку 2, ...,  $m_{k-1}-m_k$  - число жорданових клітин порядку  $k-1$ , де  $k$  змінюється від 2 до  $i$ .

Жорданові клітини будуються за схемою: (приклад)

клітка порядку 1	клітка порядку 2	клітка порядку 3	клітка порядку 4
$\begin{pmatrix} q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} q & 1 & 0 \\ 0 & q & 1 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} q & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$

Далі фіксується наступне власне значення і повторюється цей алгоритм спочатку;

Знайдені жорданові клітини розставляються по діагоналі, інші елементи матриці дорівнюють нулю.

**Приклад.** Побудувати жорданову форму матриці лінійного оператора

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

В прикладі розглянуто матрицю, для якої вже побудовано характеристичний многочлен і знайдені власні значення.

Характеристичний многочлен -  $F(x)=x^4-3x^3+3x^2-x$ . Власні значення -  $\{0, 1\}$ .

Почнемо будувати жорданові клітини.

Для першого власного значення - 0 побудуємо матрицю  $A-0 \cdot E$  і знайдемо її ранг (див. Обчислення рангу матриці).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ранг матриці дорівнює 3. ( $r_1=3$ ).

Побудуємо матрицю  $(A-0 \cdot E)^2$  і знайдемо її ранг. Отримаємо результат у вигляді:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 8 & -8 \\ 0 & -3 & 7 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ранг матриці дорівнює 3. ( $r_2=3$ ).

Отримали, що  $r_1=r_2=3$ . Обчислимо  $m_1=n-r_1=4-3=1$ ,  $m_2=n-r_2-m_1=4-3-1=0$ .

Кількість жорданових клітин, які відповідають власному значенню 0, дорівнює  $m_1=1$ , кількість жорданових клітин порядку 1 дорівнює  $m_1-m_2=1-0=1$ . Ця клітина має вигляд **(0)**.

Повторимо обчислення для власного значення - 1. Побудуємо матриці  $A-1 \cdot E$ , а також  $(A-1 \cdot E)^2$  і знайдемо їх ранги. ранг матриці  $(A-1 \cdot E)$  дорівнює 3. ( $r_1=3$ ).

$$(A-1*E)*(A-1*E)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ранг матриці  $(A-1*E)^2$  дорівнює 3. ( $r_2=2$ ).

Так як  $r_1 \neq r_2$ , то далі обчислимо матрицю  $(A-1*E)^3$  і знайдемо її ранг.

$$(A-1*E)^3=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ранг матриці дорівнює 3. ( $r_3=1$ ).

Отримали, що  $r_3=1$  і  $r_2 \neq r_3$ , значить треба знаходити  $(A-1*E)^4$  і ранг цієї матриці  $r_4$ .

$$(A-1*E)^4=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг матриці дорівнює 3. ( $r_4=1$ ).

Нарешті отримали, що  $r_4=1$  і  $r_3=r_4=1$ .

Маємо  $r_1=3$ ,  $r_2=2$ ,  $r_3=1$ ,  $r_4=1$ . Обчислимо:

- $m_1=n-r_1=4-3=1$ ,
- $m_2=n-r_2-m_1=4-2-1=1$ ,
- $m_3=n-r_3-m_1-m_2=4-1-1-1=1$ ,
- $m_4=n-r_4-m_1-m_2-m_3=4-1-1-1-1=0$ .

Кількість жорданових клітин, які відповідають власному значенню 1 дорівнює  $m_1=1$ , кількість жорданових клітин порядку 1 дорівнює  $m_1-m_2=1-1=0$ , кількість жорданових клітин порядку 2 дорівнює  $m_2-m_3=1-1=0$ , кількість жорданових клітин порядку 3

дорівнює  $m_3-m_4=1-0=1$ . Ця клітина має вигляд  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .



Жорданова форма матриці лінійного оператора має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тема "Жорданові форми"

Завдання: Побудувати жорданову форму матриці

Вправа №1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вправа №3

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №4

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вправа №5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №6

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3/2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №7

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №8

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & -1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №9

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №10

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Вправа №11

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

### 11.3. 8 Ортогоналізація системи векторів.

Процесом ортогоналізації називається перехід від системи векторів  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  до системи  $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_n\}$ , яка побудована наступним образом:

$$\bar{b}_1 = \bar{a}_1;$$

$$\bar{b}_k = \bar{a}_k - (c_1 * \bar{b}_1 + c_2 * \bar{b}_2 + \dots + c_{k-1} * \bar{b}_{k-1}) \text{ при } k=2, \dots, n, \text{ де}$$

$$c_i = (\bar{a}_k, \bar{b}_i) / (\bar{b}_i, \bar{b}_i) \quad \text{при } i=1, 2, \dots, k-1, \text{ якщо } \bar{b}_i \neq 0 \text{ і } c_i -$$

довільне число, якщо  $\bar{b}_i = 0$ .

**Приклад.** Побудуйте ортогональний базис, натягнутий на систему векторів – рядків матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Користуючись схемою, яка вище описана, маємо:

- $\bar{a}_1 = \{1, 2, 1, 2\}, \bar{b}_1 = \{1, 2, 1, 2\};$
- $\bar{a}_2 = \{2, 3, 0, 2\}, \bar{b}_2 = \bar{a}_2 - c_1 * \bar{b}_1, c_1 = (\bar{a}_2, \bar{b}_1) / (\bar{b}_1, \bar{b}_1)$
- $\bar{a}_3 = \{2, 1, 1, 3\}, \bar{b}_3 = \bar{a}_3 - c_1 * \bar{b}_1 - c_2 * \bar{b}_2, c_1 = (\bar{a}_3, \bar{b}_1) / (\bar{b}_1, \bar{b}_1),$   
 $c_2 = (\bar{a}_3, \bar{b}_2) / (\bar{b}_2, \bar{b}_2)$

Щоб виконати ці обчислення, треба застосувати обчислення скалярного добутку векторів, їх додавання і віднімання.

Обчислимо вектор  $\bar{b}_2$ . Утворимо матрицю, в якій перший рядок - це вектор  $\bar{b}_1 = \bar{a}_1$ , другий -  $\bar{a}_2$ , у третьому запишемо добуток відповідних елементів перших двох рядків. Додамо отримані числа - це буде  $(\bar{a}_2, \bar{b}_1)$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (\bar{a}_2, \bar{b}_1) = 2+6+0+4=12.$$

Аналогічно обчислимо  $(\bar{b}_1, \bar{b}_1)$ .

$$(\bar{b}_1, \bar{b}_1) = 1+4+1+4=10, c_1=12/10=6/5.$$

За формулою  $\bar{b}_2 = \bar{a}_2 - c_1 * \bar{b}_1$ , знайдемо цей вектор.

Перший рядок - це вектор  $\bar{a}_2$ , другий -  $c_1 * \bar{b}_1$ , у третьому запишемо різницю відповідних елементів перших двох рядків. Це будуть коефіцієнти вектора  $\bar{b}_2$ .  $\bar{b}_2 = \{4/5, 3/5, -6/5, -2/5\}$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 6/5 & 12/5 & 6/5 & 12/5 \\ 4/5 & 3/5 & -6/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

Аналогічно обчислюється вектор  $\bar{b}_3$ .

$$c_1 = (\bar{a}_2, \bar{b}_1) / (\bar{b}_1, \bar{b}_1) = 11/10, \quad c_2 = (\bar{a}_3, \bar{b}_2) / (\bar{b}_2, \bar{b}_2) = -1/13,$$

$$\bar{b}_3 = \bar{a}_3 - c_1 * \bar{b}_1 - c_2 * \bar{b}_2 = \{25/26, -15/13, -5/26, 10/13\}.$$

Отриманий результат можна записати у вигляді:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4/5 & 3/5 & -6/5 & -2/5 \\ 25/26 & -15/13 & -5/26 & 10/13 \end{pmatrix}$$

де перший рядок -  $\bar{b}_1$ , другий -  $\bar{b}_2$ , третій -  $\bar{b}_3$ .

Щоб перевірити, що цей базис є ортогональним, можна попарно перемножити вектори цього базису.

### Тема "Ортогоналізація систем векторів"

Завдання: Побудувати ортогоналізований базис, натягнутий на систему векторів.

Вправа №1

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ -6 & 5 & -2 & -5 \\ -8 & 1 & 4 & 9 \\ -3 & -1 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

Вправа №2

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & -7 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 11 \\ -3 & 7 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

Вправа №3

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Вправа №4

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Вправа №5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Вправа №6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вправа №7

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 5 \\ 6 & -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$